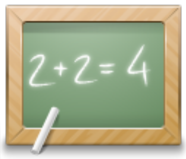
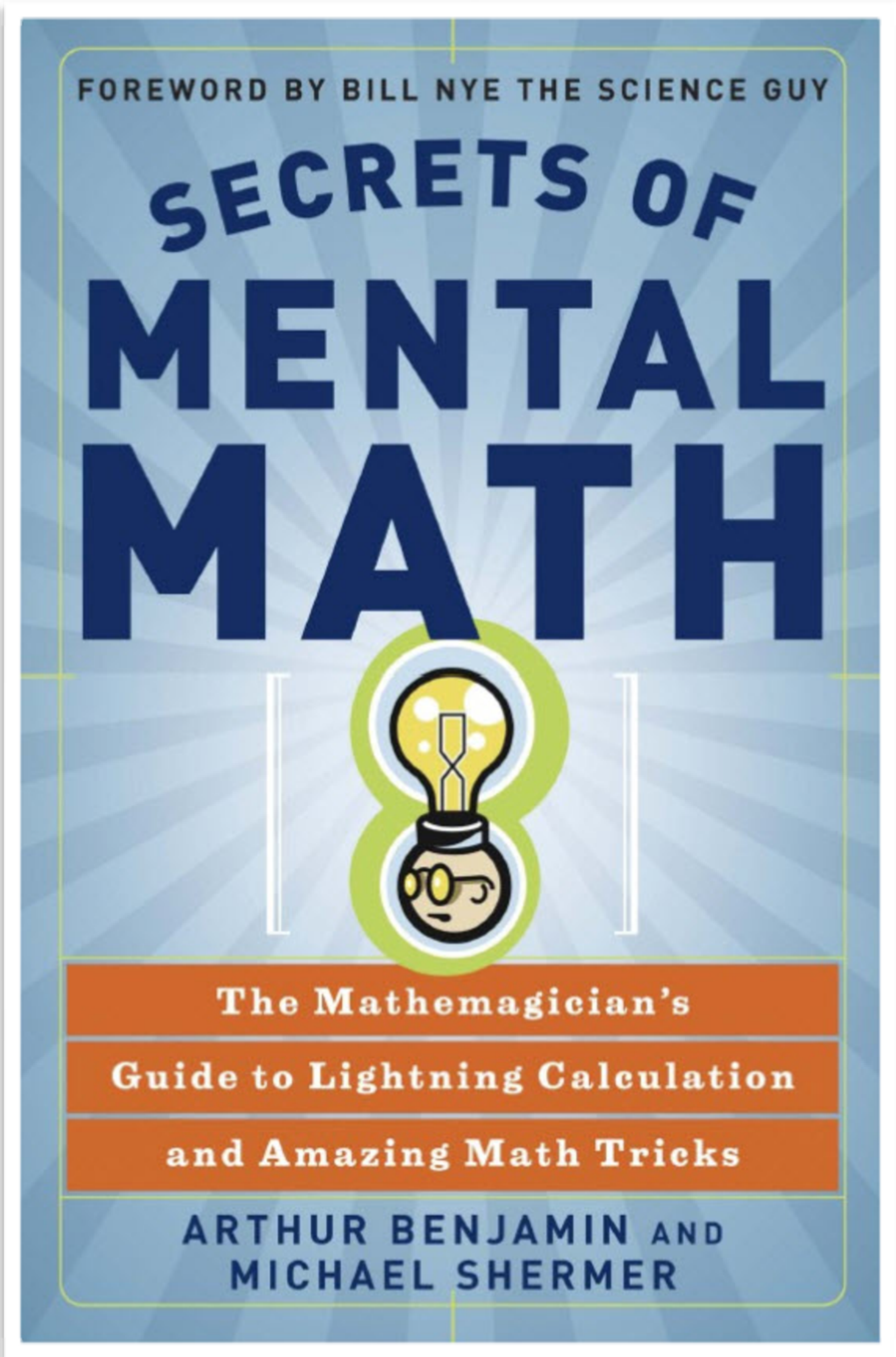
СЕКРЕТЫ МЕНТАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

МАТЕМАГИЯ





ГЛАВА 0

Мгновенное умножение

Давайте начнём с одного из моих любимых подвигов устной математики: как умножать в уме любое двузначное число на 11. Это очень легко, если вы знаете секрет.

Представьте следую задачу:

32 x 11

Для решения данной задачи нужно просто сложить цифры, 3 + 2 = 5, а затем поместить 5-ку между 2-ой и 3-ой. Вот и ваше решение:

352

Что может быть легче? Теперь попробуйте:

53 x 11

С тех пор, как 5 + 3 = 8, ответ достаточно простой:

583

Ещё пример. Не подглядывая и ничего не записывая, чему будет равно:

81 x 11?

У вас получилось **891**? Поздравляю!

Пока вы ещё не через чур воодушевились: я показал вам лишь половину того, что необходимо знать. Допустим задача следующая:

85 x 11

Несмотря на то, что 8 + 5 = 13, ответ НЕ 8**13**5!

Как и прежде, цифра 3 ставится между, но 1 добавляется к цифре 8 для получения правильного ответа: **935**

Представляйте задачу следующим образом:

$$\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \underline{\mathbf{835}} \\ \mathbf{935} \end{array}$$

Вот ещё пример. Попробуйте 57 x 11.

Так как 5 + 7 = 12, решением будет:

$$\begin{array}{r} 1 \\ \underline{527} \\ 627 \end{array}$$

Так, теперь ваша очередь. Как можно быстрее, сколько будет

77 x 11?

Если вы получили ответ **847**, то можете похлопать себя по спине. Вы на пути к превращению в матемага.

Я знаю по опыту, что если вы скажете другу или учителю, что можете в уме умножить любое двузначное число на 11, просьба умножить 99 на 11 не заставит себя долго ждать. Так давайте сделаем это прямо сейчас, чтобы вы были готовы.

Раз уж 9 + 9 = 18, то ответ:

$$\begin{array}{r} 1 \\ \underline{989} \\ 1089 \end{array}$$

Хорошо попрактикуйте свой новый навык какое-то время, а затем начинайте выпендриваться. Вы будете удивлены тому, какую реакцию это вызовет. (раскрывать или нет свои секреты - решайте сами!)

Добро пожаловать назад. К этому моменту у вас, должно быть, появилось несколько вопросов, таких как:

«Можем ли мы использовать данный метод для умножения трёхзначных (или больше) чисел на 11?»

Безусловно. Например, для задачки 314 x 11 ответ всё ещё будет начинаться с 3 и заканчиваться на 4. Так как 3 +1 = 4, а 1 + 4 = 5, ответ будет 3**<u>45</u>**4. Но мы отложим задачи посерьёзнее напотом.

Вероятнее всего, вы должно быть спрашиваете себя:

«Ну, это хорошо, что можно умножать на 11. Но как на счёт больших цифр? Как умножить цисла на 12, 13 или 36?»

Мой ответ на это: ТЕРПЕНИЕ! Об этом рассказано дальше в книге. В главах 2, 3, 6 и 8 вы изучите методы умножения, позволяющие перемножать любые 2 числа. А ещё лучше то, что вам не придётся запоминать специальные правила для каждого случая. Пригоршня методов - вот всё, что вам понадобится для умножения чисел в уме быстро и с лёгкостью.

Возведение в квадрат и большие степени

Вот ещё один трюк.

Как вы, возможно, знаете, квадрат числа - это заданное число, умноженное само на себя. Например, квадратом 7 будет 7 x 7 = 49. Позже я научу вас простому способу, который позволит вам легко вычислять квадрат любого двузначного или трёхзначного (и даже больше) числа. Этот метод особенно просто применять, когда число заканчивается на 5. Так что давайте опробуем данный приём уже сейчас.

1) Полученный ответ должен начинаться с результата умножения первой цифры возводимого в квадрат числа на следующую после неё в иерархии

2) Полученный ответ заканчивается на 25.

Например, чтобы возвести в квадрат число 35, мы просто умножаем первую цифру (3) на следующую после неё в иерархии (4), после чего добавляем 25. Так как 3 x 4 = 12, ответ будет 1225. Таким образом, 35 x 35 = 1225. Проделанные шаги могут быть представлены следующим образом:

$$\begin{array}{r} 35 \\ \times\, 35 \\ \hline 3 \times 4 = 12 \\ 5 \times 5 = 25 \\ \hline \end{array}$$

ОТВЕТ: 1225

Как на счёт возведения в квадрат числа 85? Так как 8 x 9 = 72, мы мгновенно получаем 85 x 85 = 7225:

$$\begin{array}{r} 85 \\ \times\, 85 \\ \hline 8 \times 9 = 72 \\ 5 \times 5 = 25 \\ \hline \end{array}$$

ОТВЕТ: 7225

Мы можем использовать схожий приём, когда умножаем двузначные числа с одинаковыми первыми цифрами, и с дающими в сумме 10 вторыми цифрами. Полученный ответ начинается с цифры, полученной с помощью вышеописанного метода (первая цифра умноженная на следующую после неё в иерархии), далее идет произведение вторых цифр, участвующих в умножении чисел. Например, попробуем 83 x 87. (оба числа начинаются на 8, а их последние цифры в сумме 3 + 7 = 10) Так как 8 x 9 = 72, и 3 x 7 = 21, ответ будет 7221.

$$
\begin{array}{r}
83 \\
\times\ 87 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rr}
8 \times 9 = & 72 \\
3 \times 7 = & \underline{21}
\end{array}
$$

Схожим образом получаем и 84 x 86 = 7224.

Теперь ваша очередь. Попробуйте.

26 x 24

С чего начинается ответ? С 2 x 3 = 6. На что заканчивается? На 6 x 4 = 24. Соответственно, 26 x 24 = 624.

Помните, что использовать данный метод можно только когда первые цифры чисел одинаковы, а последние дают в сумме 10. Итак, мы можем его использовать, чтобы мгновенно определить:

$$31 \times 39 = 1209$$
$$32 \times 38 = 1216$$
$$33 \times 37 = 1221$$
$$34 \times 36 = 1224$$
$$35 \times 35 = 1225$$

Вы можете спросить:

«Что если последние цифры не дают в сумме 10? Мы всё равно можем использовать данный приём, чтобы посчитать 22 х 23?»

Пока ещё нет. Но в Главе 8, я покажу вам простой способ для решения таких задач с использованием метода «совместной близости» (для действия 22 х 23 вы будете использовать 20 х 25 плюс 2 х 3 и получите 500 + 6 = 506; но это я забегаю вперёд!). Вы не только научитесь использовать данные методы, но вы также сможете понять принципы их работы.

«Существуют какие-либо методы устного сложения и вычитания?»

Определённо: и об этом вся следующая глава. Если бы меня принудили описать свой метод в двух словах, я бы сказал: «Слева направо». Вот вы украдкой и получили анонс.

Представьте себе следующую задачу на вычитание:

$$\begin{array}{r} 1241 \\ -\ 587 \\ \hline \end{array}$$

Большинству людей не понравится решать эту задачку в уме (или даже на бумаге!), но давайте всё упростим. Вместо того, чтобы вычесть 587, вычтем 600. Так как 1200 - 600 = 600, мы получаем следующее:

$$\begin{array}{r} 1241 \\ -\ 600 \\ \hline 641 \end{array}$$

Но мы вычли на 13 больше. (в Главе 3 будет объяснено, как быстро определить «13») Таким образом, наш пример, на который было больно смотреть, превращается в легкую задачу на сложение,

$$\begin{array}{r} 641 \\ +\ 13 \\ \hline 654 \end{array}$$

которую совсем просто решить в уме (в особенности слева направо). Итак, 1241 - 587 = 654.

Используя немножко математемагии, описанной в Главе 9, вы сможете мгновенно вычислять сумму десяти чисел, представленных ниже:

$$\begin{array}{r} 9 \\ 5 \\ 14 \\ 19 \\ 33 \\ 52 \\ 85 \\ 137 \\ 222 \\ +\ 359 \\ \hline 935 \end{array}$$

Хотя я не буду раскрывать магический секрет прямо сейчас, вот небольшой намёк. Полученный ответ, 935, уже появлялся в рамках данной главы. Ещё больше трюков для вычислений на бумаге вы найдёте в Главе 6. Более того, вы будете в состоянии быстро назвать частное двух следующих чисел:

$$359 \div 222 = 1.61$$

(первые три цифры)

Нам ещё много предстоит обсудить касательно деления (включая обычные и десятичные дроби) в Главе 4.

Ещё больше практических советов

Вот быстрый совет для подсчёта чаевых[1]. Предположим, что в ресторане вам выставили счёт в $42, и вы захотели оставить чаевые в размере 15%. Сначала мы вычисляем 10% от $42, что равняется $4,20. Если мы сократим это число наполовину, то получим $2,10, что представляет собой 5% от нашего счёта. Сложив эти цифры вместе, получим $6,30, в точности равные 15% от нашего счёта. Мы обсудим стратегии вычисления для налога с продаж, скидок, сложных процентов и других практичных вопросов в Главе 5, наряду со стратегиями, которые вы можете использовать для быстрых устных вычислений при отсутствии необходимости точных расчётов.

---

[1] Английское слово **tip** имеет несколько значений: в данном предложении оно используется дважды (как совет и как чаевые) прим.переводчика

Улучшайте свою память

В Главе 7 вы изучите полезную технику для запоминания чисел. Это окажется полезным внутри класса и за его пределами. Используя легкую для понимания систему трансформации цисел в слова, вы сможете быстро и без труда запоминать любые числа: даты, телефонные номера - всё, что захотите.

Говоря о календарных числах, как вы смотрите на то, чтобы иметь возможность определять день недели за любую дату? Вы можете использовать это для определения дней рождения, исторических событий, запланированных в будущем встреч, и так далее. Я расскажу вам об этом в деталях позже, но вот простой способ определения дня недели 1-го Января любого года в 21-ом веке. Первым делом ознакомьтесь с представленной таблицой:

ПОНЕДЕЛЬНИК	ВТОРНИК	СРЕДА	ЧЕТВЕРГ	ПЯТНИЦА	СУББОТА	ВОСКРЕСЕНИЕ
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7 или 0*

Например, давайте определим день недели от 1/01/2030. Возьмите последние две цифры года и представьте себе, что это ваш счёт в ресторане. (в данном случае ваш счёт $30) Теперь добавьте чаевых на 25%, но излишки в центах оставьте себе. (можете вычислить это, дважды разделив счёт пополам и отбросив всю «мелочь». Половина $30 будет $15. Затем половина $15 это $7,50. Оставив излишки себе, получим чаевые в размере $7. Отсюда получаем, что ваш счёт плюс чаевые составляет $37. Чтобы определить день недели, вычитаем из этой суммы наиболее близкое к ней - но не большее - произведение числа 7 (0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, …) и получаем с помощью этого порядковый номер дня. В данном примере, 37 - 35 = 2, значит 1-ое Января 2030 года приходится на 2-ой день, под названием Вторник:

СЧЁТ:	**30**
ЧАЕВЫЕ:	**+ 7**
	37
Произведение 7-ки:	**− 35**
	2 = ВТОРНИК

Как на счёт 1 Января 2043 года:

СЧЁТ:	**43**
ЧАЕВЫЕ:	**+ 10**
	53
Произведение 7-ки:	**− 49**
	4 = ЧЕТВЕРГ

Исключение: если год високосный, уберите $1 из суммы чаевых, посчитанных ранее. Например, для 1/01/2032, 25% от счёта в $32 будут равны $8 чаевых. Избавление от $1 даёт в итоге 32 + 7 = 39. Вычитание наибольшего по отношению к сумме счёта произведение 7 даёт нам 39 - 35 = 4. Итак, 1-ое Января 2032 года приходится на 4-ый день - ЧЕТВЕРГ. За большей информацией, которая позволит вам вычислять день недели за любую историческую дату, обращайтесь к Главе 9. (в действительности, совершенно нормально будет, если вы сначала прочитаете данную главу)

Я знаю, о чём вы сейчас думаете:

«Почему они не учат этому в школе?»

Я боюсь, что существуют вопросы, на которые даже я не знаю ответа. Вы готовы разучить ещё больше волшебной математики? Ну так чего же мы ждём? Поехали!

ГЛАВА 1

Небольшой обмен любезностями: устное сложение и вычитание

Сколько себя помню, мне всегда было легче складывать и вычитать слева направо, нежели справа налево. Складывая и вычитая таким способом, я выяснил, что могу выкрикнуть ответ на математическую задачку в классе ещё до того, как мои одноклассники запишут условия. А мне не нужно было даже записывать!

В этой Главе вы научитесь методу «справа налево», используемого для устного сложения и вычитания большинства чисел, встречающихся нам каждый день. Эти умственные навыки важны не только для выполнения трюков из данной книги, но и незаменимы для школы, трудовой деятельности или других случаев работы с цифрами. В скором времени вы сможете отправить свой калькулятор на пенсию и начать использовать мозги в полную силу, пока складываете и вычитаете двузначные, трёхзначные и даже четырёхзначные числа с молниеносной скоростью.

Сложение слева направо

Большинство из нас были обучены проводить письменные вычисления справа налево. И это нормально для вычислений на бумаге. Но если вы хотите считать в уме (даже быстрее, чем если бы вы делали это на бумаге), то существует достаточное количество убедительных аргументов, объясняющих, почему лучше это делать слева направо. В конце концов, вы читаете числовую информацию слева направо, вы произносите числа слева направо, да и это более естественно - думать о числах (и считать их) слева направо. Когда вы вычисляете ответ справа налево, вы тем самым генерируете его в обратном направлении. Это и делает вычисления в голове такими сложными. Также, если вы хотите прикинуть ответ, то более важно знать, что он «немного за 1200», чем то, что он «заканчивается на 8». Таким образом, работая по методу «слева направо», вы начинаете решение с самых существенных цифр вашей задачи. Если вы привыкли работать на бумаге справа налево, то вам может показаться неестественным подход «слева направо». Но с практикой к вам придёт понимание того, что это самый естественный и эффективный метод для устных вычислений.

С первым набором задач - сложение двузначных чисел - метод «справа налево» может и не показаться вам таким уж выгодным. Но будьте терпеливы. Если вы будете держаться рядом со мной, то увидите, что единственно лёгкий путь к решению трёхзначных (и более) задач на сложение, всех задач на вычитание и определённо всех на умножение и деление - это метод «слева направо». Чем раньше вы приучите себя вычислять таким способом, тем лучше.

Сложение двузначных чисел

Наше допущение в данной Главе состоит в том, что вы знаете, как складывать и вычитать числа, состоящие из одной цифры. Мы начнём со сложения двузначных чисел, хоть я и подозреваю, что вы уже довольно хорошо можете делать это в уме. Однако, следующие упражнения всё равно являются хорошей практикой, так как навыки сложения двузначных чисел, которые вы приобретёте здесь, понадобятся для более серьёзных задач на сложение, как впрочем и для практически всех задач на умножение в следующих главах. Это всё также иллюстрирует фундаментальный принцип устной арифметики, а именно: «упрощай задачу, разбивая её на меньшие, легче выполнимые части». Это ключ поистине к каждому методу, который вы изучите в данной книге. Перефразируя старую пословицу, существуют три составляющих успеха - упрощай, упрощай, упрощай[2].

Самые легкие задачи на сложение двузначных чисел, это те, которые не требуют от вас держать в уме никакие цифры (то есть когда первые две цифры в сумме дают 9 или меньше, или когда последние две цифры дают в сумме 9 или меньше). Например:

$$\begin{array}{r} 47 \\ \underline{+\ 32}\ (30 + 2) \end{array}$$

Чтобы посчитать 47 + 32, сначала прибавляем 30, затем 2. После прибавления 30, мы имеем задачу попроще 77 + 2, которая равняется 79. Давайте проиллюстрируем это следующим образом:

$$47 + 32 \underset{\text{сначала прибавляем 30}}{=} 77 + 2 \underset{\text{затем прибавляем 2}}{=} 79$$

Вышеприведенная схема являет собой простой способ представления умственных процессов, задействованных в получении правильного ответа с помощью нашего метода. Хотя вы должны быть в состоянии читать и понимать такие схемы на протяжении всего процесса работы с этой книгой, наш метод не требует от вас ничего записывать самому.

Теперь давайте попробуем вычисление, где необходимо держать числа в уме:

$$\begin{array}{r} 67 \\ \underline{+\ 28}\ (20 + 8) \end{array}$$

2

Прибавляя слева направо, вы можети свести задачу к действию 67 + 20 = 87; после 87 + 8 = 95.

$$67 + 28 \quad = \quad \underset{\text{сначала прибавляем 20}}{87 + 8} \quad = \quad \underset{\text{затем прибавляем 8}}{95}$$

А теперь попробуйте сами, мысленно вычисляя слева направо, после чего проверьте то, как мы сделали это ниже:

$$\begin{array}{r} 84 \\ \underline{+\ 57}\ (50 + 7) \end{array}$$

Ну как оно? Вы сложили 84 + 50 = 134 и затем 134 + 7 = 141:

$$84 + 57 \quad = \quad \underset{\text{сначала прибавляем 20}}{134 + 7} \quad = \quad \underset{\text{затем прибавляем 8}}{141}$$

Если процесс удержания цифр в уме является причиной ваших ошибок, не переживайте. Это, вероятно, ваша первая попытка произвести систематизированное устное вычисление. И если вы похожи на большинство людей, то вам потребуется время для привыкания. С практикой, однако, вы начнёте видеть и слышать числа в своей голове, и держать цифры в уме во время сложения на автопилоте. Попробуйте решить ещё одну задачку в качестве практики, снова посчитав её сначала в уме, а затем проверив, как мы сделали это:

$$\begin{array}{r} 68 \\ \underline{+\ 45}\ (40 + 5) \end{array}$$

Вам следовало сложить 68 + 40 = 108, а затем 108 + 5 = 113 (итоговый ответ). Было ли это легче? Если вы хотите проверить свои силы на большем количестве задач на сложение двузначных чисел, обратитесь к примерам, представленным ниже. (ответы и вычисления даны в конце книги)

УПРАЖЕНИНЕ: сложение двузначных чисел

1. $\begin{array}{r} 23 \\ +\ 16 \\ \hline \end{array}$	2. $\begin{array}{r} 64 \\ +\ 43 \\ \hline \end{array}$	3. $\begin{array}{r} 95 \\ +\ 32 \\ \hline \end{array}$	4. $\begin{array}{r} 34 \\ +\ 26 \\ \hline \end{array}$	5. $\begin{array}{r} 89 \\ +\ 78 \\ \hline \end{array}$
6. $\begin{array}{r} 73 \\ +\ 58 \\ \hline \end{array}$	7. $\begin{array}{r} 47 \\ +\ 36 \\ \hline \end{array}$	8. $\begin{array}{r} 19 \\ +\ 17 \\ \hline \end{array}$	9. $\begin{array}{r} 55 \\ +\ 49 \\ \hline \end{array}$	10. $\begin{array}{r} 39 \\ +\ 38 \\ \hline \end{array}$

Сложение трёхзначных чисел

Стратегия сложения трёхзначных чисел точно такая же, как и для двузначных: вы складываете слева направо. После каждого шага, вы переходите к новой (и более простой) задаче на сложение. Давайте попробуем следующее:

$$\begin{array}{r} 538 \\ +\ 327 \\ \hline \end{array} \ (300 + 20 + 7)$$

Начиная с 538, мы прибавляем 300, затем 20, затем 7. После прибавления 300 (538 + 300 = 838), задача сводится к 838 + 27. После прибавления 20 (838 + 20 = 858), задача упрощается до 858 + 7 = 865. Такого рода мыслительный процесс может быть представлен в виде следующей схемы:

$$538 + 327 \underset{+\,300}{=} 838 + 27 \underset{+\,20}{=} 858 + 7 \underset{+\,7}{=} 865$$

Все задачки на сложение в уме могут быть решены данным способом. Цель состоит в том, чтобы последовательно упрощать задачу до тех пор, пока вам не придётся просто прибавлять однозначное число. Обратите внимание на то, что пример 538 + 327 требует от вас держать в уме шесть цифр, тогда как 838 + 27 и 858 + 7 требуют только пять и четыре, соответственно.

Если вы упрощаете задачу, задача становится легче!

Попробуйте решить следующую задачку на сложение в уме прежде, чем смотреть на наше решение:

$$\begin{array}{r} 623 \\ \underline{+\ 159}\ (100 + 50 + 9) \end{array}$$

Вы уменьшили и упростили её, прибавляя слева направо? После прибавления сотен (623 + 100 = 723) осталось 723 + 59. Далее вам следует прибавить десятки (723 + 50 = 773), упростив проблему до 773 + 9, что вы потом подытоживаете в виде 782. В виде схемы задача выглядит следующим образом:

$$623 + 159 \underset{+100}{=} 723 + 59 \underset{+50}{=} 773 + 9 \underset{+9}{=} 782$$

Когда я решаю эти задачи в уме, я не пытаюсь **видеть** числа у себя в голове - я пытаюсь **слышать** их. Я слышу пример 623 + 159 как *шесть***сот** *двадцать три плюс* **сто** *пятьдесят девять*; выделяя слово **сто** для себя, я понимаю, с чего начать. Шесть плюс один равняется семи, значит моя следующая задача *семьсот* **двадцать** *три плюс* **пятьдесят** *девять*, и так далее. Когда вы только начинаете решать такие задачи, делайте это вслух. Подкрепление в виде звуков поможет вам научиться данному методу гораздо быстрее.

Задачи на сложение трёхзначных чисел, на самом деле, не бывают сложнее следующей:

$$\begin{array}{r} 858 \\ +\ \underline{634} \end{array}$$

Взгляните на то, как мы это сделали:

$$858 + 634 \underset{+600}{=} 1458 + 34 \underset{+30}{=} 1488 + 4 \underset{+4}{=} 1492$$

На каждом шаге я слышу (не вижу) новую задачу на сложение. У меня в голове проблема звучит как:

858 плюс 634 это 1458 плюс 34 это 1488 плюс 4 это 1492

Ваш внутренний голос может звучать иначе, нежели мой (конечно, вы можете «видеть» числа, вместо того, чтобы «слышать» их), но как бы там ни было, наша цель - «подкреплять» числа на их пути, чтобы вы не забыли, где находитесь, и не пришлось начинать всё сначала.

Давайте ещё попрактикуемся:

$$\begin{array}{l} \ \ 759 \\ \underline{+\ 496}\ (400 + 90 + 6) \end{array}$$

Сделайте это сначала в уме, потом проверьте вычисления ниже:

$$759 + 496 \underset{+400}{=} 1159 + 96 \underset{+90}{=} 1249 + 6 \underset{+6}{=} 1255$$

Этот пример на сложение немного сложнее предыдущего, так как требует от вас держать в уме цифры на протяжении всех трёх шагов. Однако, с этим конкретным примером вы имеете возможность использовать альтернативный метод расчёта. Я уверен, что вы согласитесь: гораздо проще прибавить 500 к 759, чем 496. Так что попробуйте прибавить 500 и затем вычесть разницу:

$$\begin{array}{r} 759 \\ \underline{+\,496} \end{array}\ (500 - 4)$$

$$\underbrace{759 + 496 = 1259}_{\text{сначала прибавляем 500}} \underbrace{- 4 = 1255}_{\text{затем вычитаем 4}}$$

До сих пор вы последовательно расчленяли второе число для прибавления его к первому. На самом деле, решение о том, какое число разбивать на части, не играет роли, но важно быть последовательным в действиях. В этом случае, ваш мозг никогда не будет вынужден тратить время на принятие решения о том, в какую сторону направиться. Если второе число оказалось намного легче первого, то я иногда могу поменять их местами, как в следующем примере:

$$\begin{array}{r} 207 \\ \underline{+\,528} \end{array}$$

$$207 + 528 \underset{\text{меняем местами}}{=} 528 + 207 \underset{+200}{=} 728 + 7 \underset{+7}{=} 735$$

Давайте закончим данную тему сложением трёхзначных чисел с четырёхзначными. Так как память среднестатистического человека может удерживать только семь или восемь цифр одновременно, это как раз подходящая по размеру задача, с которой вы можете справится, не прибегая к искусственным устройствам запоминания (таким как пальцы, калькуляторы или мнемотехники из Главы 7). Во многих задачах на сложение, которые возникают на практике (особенно в рамках задач на умножение), одно или оба числа заканчиваются на 0, так что нам следует сконцентрировать внимание на примерах такого типа. Давайте начнём с лёгкого примера:

$$\begin{array}{r} 2700 \\ +\ \ 567 \\ \hline \end{array}$$

Раз уж 27 **сотен** + 5 **сотен** равняется 32 **сотням**, мы просто добавляем 67 с целью получить 32 **сотни** и 67, или 3267. Процесс решения идентичен для следующих заданий:

$$\begin{array}{r} 3240 \\ +\ \ \ \ 18 \\ \hline \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 3240 \\ +\ \ \ \ 72 \\ \hline \end{array}$$

Потому что 40 + 18 = 58, первый ответ 3258. В рамках второго примера, так как 40 + 72 в сумме дают больше 100, вы знаете, что ответ будет 33 сотни с «чем-то». Итак, 40 + 72 = 112, значит ответ 3312.

Эти задачи такие лёгкие, потому что цифры цифры здесь перекрываются лишь однажды, следовательно, примеры могут быть решены в одно действие. Где же цифры накладываются друг на друга в двух местах, требуется два действия. Например:

$$\begin{array}{rl} 4560 & \\ +\ \ 171 & (100 + 71) \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Задача, решающаяся в два действия, схематически выглядит следующим образом:

$$4560 + 171 \underset{+\,100}{=} 4660 + 71 \underset{+\,71}{=} 4731$$

Тренируйтесь на представленных ниже упражнениях на сложение трёхзначных чисел и затем добавьте несколько своих по желанию, до тех пор, пока вы комфортно считаете их в уме и не подглядываете. (Вы можете найти ответы в конце книги)

Карл Фридрих Гаусс: вундеркинд от математики

Вундеркинд - это очень талантливый ребёнок, обычно называемый «не по годам развитым» или «одаренным», почти всегда опережающий своих сверстников. Немецкий математик Карл Фридрих Гаусс (1777-1855) был одним из таких детей. Он часто хвастался тем, что научился производить расчёты раньше, чем говорить. В зрелом возрасте трех лет, прежде чем его начали учить какой-либо арифметике, он подправил платёжную ведомость отца, заявив: «Подсчёты неверны». Дальнейшая проверка чисел показала, что молодой Карл был прав.

В качестве десятилетнего ученика, Гаусс получил следующую математическую задачу: какова сумма чисел от 1 до 100? В то время, как его сокурсники отчаянно производили расчеты с бумагой и карандашом, Гаусс сразу представил себе, что если он рассредоточит цифры от 1 до 50 слева направо, а числа с 51 по 100 справа налево прямо под списком цифр 1-50, то каждая комбинация в сумме будет давать 101 (1 + 100,2 + 99,3 + 98, ...). Так как там всего пятьдесят сумм, ответ будет 101 x 50 = 5050. Ко всеобщему изумлению (включая учителя), юный Карл получил ответ не только опередив всех остальных, но и вычислив его целиком в уме. Он записал ответ на своей грифильной доске и швырнул его на стол учителя с дерзким: «Вот он лежит». Учитель был настолько впечатлен, что он инвестировал свои собственные деньги, чтобы купить наилучший из доступных учебников по арифметике и отдал его Гауссу, заявив: «Он находится за пределами моих возможностей, я больше ничему не смогу его научить».

Действительно, Гаусс стал учителем математики для других, и в конечном итоге продвинулся дальше, чтобы стать одним из величайших математиков в истории, чьи теории до сих пор на службе науки. Желание Гаусса лучше понимать природу через язык математики было подытожено в его девизом, взятом из шекспировского Короля Лира (заменяя «закон» на «законы»): «Природа, ты моя богиня! В жизни Я лишь твои законам послушен»

Упражнение: сложение трёхзначных чисел

1. 242 + 137	2. 312 + 256	3. 635 + 814	4. 457 + 241	5. 912 + 475
6. 852 + 378	7. 457 + 269	8. 878 + 797	9. 276 + 689	10. 877 + 539
11. 5400 + 252	12. 1800 + 855	13. 6120 + 136	14. 7830 + 348	15. 4240 + 371

Вычитание слева направо

Для большинства из нас, сложение легче вычитания. Но если вы продолжите вычитать слева направо и разбивать примеры на более простые действия, вычитание может стать почти таким же простым, как сложение.

Вычитание двузначных чисел

В процессе вычитания двузначных чисел вы преследуете цель упростить задачу, доведя её до вычитания (или сложения) однозначного числа. Давайте начнём с очень простого примера на вычитание:

$$\begin{array}{r} 86 \\ -\ \underline{25} \end{array}\ (20 + 5)$$

После каждого действия вы прибываете на новый и более лёгкий этап вычитания. Здесь мы сперва отнимаем 20 (86 - 20 = 66), далее мы отнимаем 5, чтобы достигнуть самого простого действия 66 - 5 для получения итогового ответа 61. Задача может быть схематически представлена как:

$$\underbrace{86 - 25 = 66}_{\text{СНАЧАЛА ОТНИМАЕМ 20}} \underbrace{- 5 = 61}_{\text{ЗАТЕМ 5}}$$

Конечно, вычитание значительно легче, когда не приходится занимать (такое происходит, когда большая цифра вычитается из меньшей). Но хорошая новость в том, что «тяжёлые» задачки на вычитание обычно могут быть превращены в «легкие» задачки на сложение. Например:

$$\begin{array}{r} 86 \\ \underline{-\ 29} \end{array} (20 + 9) \quad \textbf{или} \quad (30 - 1)$$

Существует два разных способа решить этот пример в уме:

1) Сначала отнимаем 20, затем 9

$$\underbrace{86 - 29 = 66}_{\text{СНАЧАЛА ОТНИМАЕМ 20}} \underbrace{- 9 = 57}_{\text{ЗАТЕМ 9}}$$

2) Сначала отнимаем 30, потом прибавляем 1

$$\underbrace{86 - 30 = 56}_{\text{СНАЧАЛА ОТНИМАЕМ 30}} \underbrace{+ 1 = 57}_{\text{ЗАТЕМ ПРИБАВЛЯЕМ 1}}$$

__Вот правило, помогающее решить, какой метод использовать:__ если задача на вычитание двузначных чисел требует «заёма», то округляйте цифру, которую отнимаете. Вычитайте округлённое число, а потом прибавляйте разницу.

Например, задача 54 - 28 требует заёма (так как 8 больше 4), значит округляем 28 до 30, считаем 54 - 30 = 24, после чего прибавляем 2 и получаем 26 в качестве ответа:

$$\begin{array}{r} 54 \\ \underline{-\ 28} \end{array} (30 - 2)$$

$$54 - 28 \underset{-30}{=} 24 + 2 \underset{+2}{=} 26$$

А теперь набейте руку (или голову) на примере 81 - 37. Так как 7 больше 1, мы округляем 37 до 40, вычитаем это число из 81 (81 - 40 = 41), а затем прибавляем назад разницу в виде 3 для получения итогового ответа:

$$81 - 37 \underset{-40}{=} 41 + 3 \underset{+3}{=} 44$$

Всего лишь немного практики и вы без труда сможете решать задачи обоими способами. Просто используйте вышеуказанное правило для принятия решения о том, какой способ лучше подходит.

Упражнение: вычитание двузначных чисел

1. $\begin{array}{r} 38 \\ \underline{-\ 23} \end{array}$ 2. $\begin{array}{r} 84 \\ \underline{-\ 59} \end{array}$ 3. $\begin{array}{r} 92 \\ \underline{-\ 34} \end{array}$ 4. $\begin{array}{r} 67 \\ \underline{-\ 48} \end{array}$ 5. $\begin{array}{r} 79 \\ \underline{-\ 29} \end{array}$

6. $\begin{array}{r} 63 \\ \underline{-\ 46} \end{array}$ 7. $\begin{array}{r} 51 \\ \underline{-\ 27} \end{array}$ 8. $\begin{array}{r} 89 \\ \underline{-\ 48} \end{array}$ 9. $\begin{array}{r} 125 \\ \underline{-\ 79} \end{array}$ 10. $\begin{array}{r} 148 \\ \underline{-\ 86} \end{array}$

Вычитание трёхзначных чисел

А теперь давайте попробуем вычитание трёхзначных чисел:

$$\begin{array}{r} 958 \\ -\underline{417} \end{array} (400 + 10 + 7)$$

Этот конкретный пример не требует от вас занимать никакие числа (так как каждая цифра второго числа как минимум на единицу меньше цифр первого), так что он не должен вам показаться слишком сложным. Просто вычитайте по одной цифре за раз, с каждым шагом упрощая задачу.

$$958 - 417 \underset{-400}{=} 558 - 17 \underset{-10}{=} 548 - 7 \underset{-7}{=} 541$$

А теперь давайте взглянем на задачку по вычитанию трёхзначных чисел, которая подразумевает заём:

$$\begin{array}{r} 747 \\ -\underline{598} \end{array} (600 - 2)$$

На первый взгляд она, возможно, кажется довольно сложной. Но если вы сначала отнимете 747 - 600 = 147, а потом прибавите назад 2, то получите итоговый ответ 147 + 2 = 149.

$$747 - 598 \underset{-600}{=} 147 + 2 \underset{+2}{=} 149$$

А теперь попробуйте сами:

$$\begin{array}{r} 853 \\ -\ 692 \\ \hline \end{array}$$

Вы сначала отняли 700 от 853? Если да, то получили ли вы потом 853 - 700 = 153? Так как вы отняли на 8 больше, то добавили ли 8 назад, чтобы получить 161, итоговый ответ?

$$853 - 692 \underset{-\,700}{=} 153 + 8 \underset{+\,8}{=} 161$$

Теперь я могу признать, что нам удалось упростить вашу жизнь путём вычитания чисел, почти кратным 100. (Вы заметили?) Но как на счёт других задач, например:

$$\begin{array}{r} 725 \\ -\ 468 \\ \hline \end{array} (400 + 60 + 8) \text{ или } (500 - ??)$$

Если вы будете вычитать по одной цифре за раз, упрощая каждое действие, то ваша последовательность будет выглядеть так:

$$725 - 468 \underset{\text{СНАЧАЛА ОТНИМАЕМ 400}}{=} 325 - 68 \underset{\text{ЗАТЕМ 60}}{=} 265 - 8 \underset{\text{ПОТОМ 8}}{=} 257$$

А что произойдёт, если округлить до 500?

$$725 - 468 \underset{\text{СНАЧАЛА ОТНИМАЕМ 500}}{=} 225 + ?? \underset{\text{ПОСЛЕ ПРИБАВЛЯЕМ ??}}{=} ??$$

Вычесть 500 легко: 725 - 500 = 225. Но вы отняли слишком много. Хитрость в том, чтобы точно определить «насколько много слишком много».

На первый взгляд, ответ далеко не очевиден. Чтобы найти его, вам нужно знать, как далеко 468 находится от 500. Ответ может быть получен с помощью «дополнения», ловкого приёма, который сделает большинство задач на вычитание трёхзначных чисел намного легче.

Использование Дополнений (ВСЕГДА ПОЖАЛУЙСТА!)

Быстро скажите, как далеко от 100 эти числа?

57 68 49 21 79

Вот ответы:

$$\begin{array}{r} 57 \\ +\ 43 \\ \hline 100 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 68 \\ +\ 32 \\ \hline 100 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 49 \\ +\ 51 \\ \hline 100 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 21 \\ +\ 79 \\ \hline 100 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 79 \\ +\ 21 \\ \hline 100 \end{array}$$

Обратите внимание, что для каждой пары чисел, образующих 100, первые цифры (слева) в сумме дают 9, а последние (справа) в сумме дают 10. Мы можем сказать, что 43 - это дополнение 57, 32 - это дополнение для 68, и так далее.

А сейчас отыщите дополнения к следующим двузначным числам:

37 59 93 44 08

Чтобы найти дополнение к числу 37, сначала определите, что нужно прибавить к 3, чтобы получить 9. (ответ - 6) Затем выясните, что следует добавить к 7 для образования 10. (ответ - 3) Следовательно, 63 есть дополнение 37.

Остальные дополнения 41, 7, 56, 92. Обратите внимание, что находясь в статусе матемага, вы определяете дополнения, как и всё остальное, слева направо. Как мы уже видели, первую цифру увеличиваем до 9, вторую до 10. (исключением считается, когда числа заканчиваются на 0 (например, 30 + 70 = 100), но такие дополнения легко определить!)

Какая связь между дополнениями и устным вычитанием? Ну, они позволяют преобразовать сложные примеры на вычитание в простые задачи на сложение. Давайте рассмотрим последнюю задачу на вычитание, которая доставила нам немного трудностей:

$$\begin{array}{r} 725 \\ -\underline{468} \end{array} \; (500 - 32)$$

Для начала, вы отнимаете 500 вместо 468 и получаете 225 (725 - 500 = 225). Но потом, так как вы вычли слишком много, нужно выяснить, сколько следует прибавить обратно. Использование дополнений позволит вам получить ответ мгновенно. Как далеко 468 от 500? Также далеко, как и 68 от 100. Если вы будете искать дополнение 68 способом, который был показан выше, то получите 32. Прибавьте 32 к 225 и получите 257 в качестве ответа.

$$725 - 468 \underset{\text{СНАЧАЛА ОТНИМАЕМ 500}}{=} 225 + 32 \underset{\text{ПОТОМ ПРИБАВЛЯЕМ 32}}{=} 257$$

Попробуйте другую задачу на вычитание трёхзначных чисел:

$$\begin{array}{r} 821 \\ -\underline{259} \end{array} \; (300 - 41)$$

Чтобы посчитать это в уме, отнимите 300 от 821 для получения 521, затем прибавьте назад дополнение 59 (что есть 41) для получения 562, итогового ответа. Весь процесс выглядит следующим образом:

$$821 - 259 \underset{-300}{=} 521 + 41 \underset{+41}{=} 562$$

Вот ещё один пример вам на пробу:

$$\begin{array}{r l} 645 & \\ \underline{-\ 372} & (400 - 28) \end{array}$$

Проверьте свой ответ и процесс решения ниже:

$$645 - 372 \underset{-400}{=} 245 + 28 \underset{+20}{=} 265 + 8 \underset{+8}{=} 273$$

Вычитание трёхзначного числа из четырёхзначного числа немногим сложнее, что и иллюстрирует следующий пример:

$$\begin{array}{r l} 1246 & \\ \underline{-\ \ 579} & (600 - 21) \end{array}$$

Путём округления вы отнимаете 600 от 1246. Остается 646. Затем вы прибавляете дополнение 79 (что есть 21). Ваш итоговый ответ 646 + 21 = 667.

$$1246 - 579 \underset{-600}{=} 646 + 21 \underset{+21}{=} 667$$

Попробуйте выполнить упражнения на вычитание трёхзначных чисел, которые даны ниже, и после этого можете создать какие-то свои на сложение. (или это должно быть вычитание?)

<u>Упражнение: вычитание трёхзначных чисел</u>

1.	2.	3.	4.	5.
583	936	587	763	204
− 271	− 725	− 298	− 486	− 185

6.	7.	8.	9.	10.
793	219	978	455	772
− 402	− 176	− 784	− 319	− 596

11.	12.	13.	14.	15.
873	564	1428	2345	1776
− 357	− 228	− 571	− 678	− 987

ГЛАВА 2

Последствия растраченной молодости: основы умножения

Я, вероятно, провёл слишком много времени в детстве, думая о том, как можно всё быстрее и быстрее перемножать в уме. Мне был поставлен диагноз «гиперактивность», и моим родителям говорили, что у меня короткий период концентрации внимания и что, скорее всего, мне не снискать успеха в школе. (К счастью, родители это проигнорировали. Мне также посчастливилось иметь дело с очень терпеливыми учителями на первых годах обучения) Должно быть это мой короткий переиод концентрации внимания мотивировал меня к развитию ускоренных способов счёта. Я не думаю, что обладал достаточным терпением для выполнения задач с карандашом и бумагой. Как только вы освоите техники, описанные в данной Главе, вы расхотите полагаться на эти инструменты вновь.

В этой Главе вы научитесь умножать в уме числа, состоящие из одной цифры, на двузначные и трёхзначные числа. Кроме того, вы изучите феноменально быстрый способ возводить в квадрат двузначные числа. Даже друзья с калькуляторами не смогут угнаться за вами. Поверьте, практически каждый будет ошеломлён тем, что такие задачи могут быть, мало того что, решены в уме, так ещё и посчитаны так быстро. Я иногда задаюсь вопросом, почему мы не жульничали так в школе; эти методы кажутся такими простыми, как только вы их выучите.

Есть одна маленькая предпосылка для изучения навыков из этой Главы - вам необходимо знать таблицу умножения вплоть до десяти. В действительности, чтобы добиться реального прогресса, вы должны быть в состоянии воспроизвести её в обоих направлениях. Те из вас, кому необходимо освежить знания, могут обратиться к таблице умножения ниже. Как только вы «проглотили» таблицу, можете начинать.

Таблица умножения от 1 до 10

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Задачки на умножения типа «2-на-1»

Если вы поработали над Главой 1, то уже вникли в суть привычки складывать и вычитать слева направо. Вы будете выполнять фактически все вычисления в данной главе также слева направо. Это несомненно полная противоположность тому, что вы учили в школе. Но вскоре вы поймёте, насколько легче думать слева направо, нежели справа налево. (С одной стороны, вы можете сказать свой ответ вслух, прежде чем вы закончили расчет. Таким образом, вы, кажется, считаете даже быстрее самого себя)

Давайте примемся за наш первый пример:

$$\begin{array}{r} 42 \\ \times\ 7 \\ \hline \end{array}$$

Сначала, умножаем 40 х 7 = 280. (обратите внимание на то, что 40 х 7 - это почти то же самое, что и 4 х 7, только с добавлением дружелюбного нуля) Далее, умножаем 2 х 7 = 14. Теперь прибавляем 280 плюс 14 (слева направо, естественно) и получаем итоговый ответ 294. Проиллюстрируем процесс ниже:

$$\begin{array}{rr}
 & 42\ (40 + 2) \\
 & \underline{\times \quad 7} \\
40 \times 7 = & 280 \\
2 \times 7 = & \underline{+ \ \ 14} \\
 & 294
\end{array}$$

Мы опустили на приведённой схеме устное сложение 280 + 14, так как вы уже научились делать подобные вычисления в прошлой Главе. Первые разы вам придётся подсматривать условия задачи во время вычислений. С практикой, вы сможете отказаться от этого шага и вычислять всё полностью в уме.

Давайте попробуем другой пример:

$$\begin{array}{l}
48\ (40 + 8) \\
\underline{\times \ \ 4}
\end{array}$$

Ваше первое действие состоит в том, чтобы разбить пример на маленькие задачки на умножение, которые вы сможете с легкостью выполнить в уме. Так как 48 = 40 + 8, умножаем 40 х 4 = 160, затем прибавляем 8 х 4 = 32. Ответ будет 192. (Примечание: если вас интересует *почему* это работает, обратитесь к секции «Почему эти приёмы работают» в конце данной Главы)

$$
\begin{array}{rr}
 & 48\ (40 + 8) \\
 & \underline{\times \quad 4} \\
40 \times 4 = & 160 \\
8 \times 4 = & \underline{+\ 32} \\
 & 192
\end{array}
$$

Вот ещё две задачи для устного умножения, которые вы должны быть в состоянии решить достаточно быстро. Сначала считаем 62 x 3. Затем 71 x 9. Попытайтесь решить их в уме, пержде чем смотреть на то, как мы сделали это.

$$
\begin{array}{rr}
 & 62\ (60 + 2) \\
 & \underline{\times \quad 3} \\
60 \times 3 = & 180 \\
2 \times 3 = & \underline{+ \quad 6} \\
 & 186
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rr}
 & 71\ (70 + 1) \\
 & \underline{\times \quad 9} \\
70 \times 9 = & 630 \\
1 \times 9 = & \underline{+ \quad 9} \\
 & 639
\end{array}
$$

Эти два примера в особенности простые, потому что числа, которые прибавляются, практически не перекрывают друг друга. Во время действия 180 + 6, вы можете практически слышать ответ: **сто восемьдесят…шесть!** Другой в особенности лёгкий тип устного умножения включает в себя числа, начинающиеся на пять. Когда пять умножается на чётную цифру, то в результате первое число получается кратным 100, что делает итоговую задачу на сложение простой.

$$
\begin{array}{rr}
 & 58\ (50 + 8) \\
 & \times\quad 4 \\ \hline
50 \times 4 = & 200 \\
8 \times 4 = & +\ \ 32 \\ \hline
 & 232
\end{array}
$$

Понабивайте руку на следующем примере:

$$
\begin{array}{rr}
 & 87\ (80 + 7) \\
 & \times\quad 5 \\ \hline
80 \times 5 = & 400 \\
7 \times 5 = & +\ \ 35 \\ \hline
 & 435
\end{array}
$$

Обратите внимание, насколько легче решать данный пример слева направо. Требуется намного меньше времени, чтобы посчитать «400 плюс 35» в уме, чем понадобилось бы для применения метода «карандаш-и-бумага» и «записываем 5, 3 в уме».

Следующие два примера немного сложнее:

$$
\begin{array}{rr}
 & 38\ (30 + 8) \\
 & \times\quad 9 \\ \hline
30 \times 9 = & 270 \\
8 \times 9 = & +\ \ 72 \\ \hline
 & 342
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rr}
 & 67\ (60 + 7) \\
 & \times\quad 8 \\ \hline
60 \times 8 = & 480 \\
7 \times 8 = & +\ \ 56 \\ \hline
 & 536
\end{array}
$$

Как обычно, мы разбиваем задачу на задачки поменьше. Для примера слева, умножаем 30 x 9 плюс 8 x 9, в итоге 270 + 72. Задача на сложение немного тяжелее, потому что включает в себя запоминание чисел. Вот 270 + 70 + 2 = 340 + 2 = 342.

С практикой, вы станете более опытны в удержании задач, на подобие этой, у себя в голове. И те из них, что требуют запоминания чисел, станут почти такими же лёгкими как те, которые не требуют.

Округление

Вы увидели в прошлой Главе, как полезно может быть округление, когда дело касается вычитания. Та же история и с умножением, особенно когда вы умножаете числа, заканчивающиеся на 8 или 9.

Давайте рассмотрим пример 69 x 6, проиллюстрированный ниже. Слева представлено вычисление обычным способом: прибавляем 360 + 54. Справа, однако, мы округлили 69 до 70 и вычли 420 - 6, что вам может показаться более лёгким действием.

$$\begin{array}{rr} & 69\ (60+9) \\ & \underline{\times\quad 6} \\ 60\times 6 = & 360 \\ 9\times 6 = & \underline{+\ \ 54} \\ & 414 \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{rr} & 69\ (70-1) \\ & \underline{\times\quad 6} \\ 70\times 6 = & 420 \\ -1\times 6 = & \underline{-\quad 6} \\ & 414 \end{array}$$

Следующий пример также показывает, насколько легче может быть округление:

$$\begin{array}{rr} & 78\ (70+8) \\ & \underline{\times\quad 9} \\ 70\times 9 = & 630 \\ 8\times 9 = & \underline{+\ \ 72} \\ & 702 \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{rr} & 78\ (80-2) \\ & \underline{\times\quad 9} \\ 80\times 9 = & 720 \\ -2\times 9 = & \underline{-\ \ 18} \\ & 702 \end{array}$$

Метод вычитания работает особенно хорошо для чисел, которые на одну-две цифры дальше от кратного 10. Он уже не так хорош, когда вам нужно округлять более чем на две цифры, потому что сам пример на вычитание становится сложным. Так что вы можете продолжать придерживаться метода сложения. Лично я, для задач такого размера, использую только метод сложения, потому что за время, потраченное на выбор метода, я бы уже мог всё посчитать!

Раз уж вы можете усовершенствовать свою технику, я настоятельно рекомендую практиковаться побольше на задачках типа «2-на-1». Ниже представлены 20 примеров, решения на которые вы можете поискать. Я предоставил вам ответы в конце книги, включая разбивку на действия для каждого компонента процесса умножения. Если после разбора каждого из примеров вы захотите ещё попрактиковаться, то просто составьте свои собственные. Считайте в уме, затем проверяйте ответ с калькулятором. Как только вы почувствуете уверенность в том, что можете выполнять такие задачки моментально в уме, вы будете готовы перейти на следующий уровень устных вычислений.

Упражнение: умножение типа «2-на-1»

1. 82×9	2. 43×7	3. 67×5	4. 71×3	5. 93×8
6. 49×9	7. 28×4	8. 53×5	9. 84×5	10. 58×6
11. 97×4	12. 78×2	13. 96×9	14. 75×4	15. 57×7
16. 37×6	17. 46×2	18. 76×8	19. 29×3	20. 64×8

Задачи на умножение типа «3-на-1»

Теперь, когда вы умеете решать задачи типа «2-на-1» в уме, умножение трёхзначных чисел на состоящие из одной цифры не покажется вам более сложным. Вы можете начать со следующего примера типа «3-на-1» (который на самом деле представляет собой замаскированный «2-на-1»):

$$\begin{array}{rr} & 320\ (300 + 20) \\ & \times\quad 7 \\ \hline 300 \times 7 = & 2100 \\ 20 \times 7 = & +\ 140 \\ \hline & 2240 \end{array}$$

Было ли это легко? (если данный пример доставил трудностей, вам должно быть следует пересмотреть материал по сложению в Главе 1) Давайте попробуем решить ещё один пример «3-на-1», подобный тому, который вы только что посчитали, но уже заменим 0 на 6, чтобы у вас появилось ещё одно действие для выполнения:

$$\begin{array}{rr} & 326\ (300 + 20 + 6) \\ & \times\quad 7 \\ \hline 300 \times 7 = & 2100 \\ 20 \times 7 = & +\ 140 \\ \hline & 2240 \\ 6 \times 7 = & +\quad 42 \\ \hline & 2282 \end{array}$$

В данном случае, вы просто прибавляете результат от 6 x 7, который уже известен как 42, к первой сумме 2240. Так как вам не нужно запоминать никакие числа, то будет легко сложить 42 с 2240 и получить в итоге 2282.

При решении данной и других задач типа «3-на-1» камнем преткновения может стать удержание в памяти первой суммы (в этом примере - 2240), в то время как вы заняты умножением (здесь - 6 x 7). Не существует какого-либо магического секрета для запоминания первого числа, но я гарантирую, что с практикой вы улучшите свою концентрацию, и удержание чисел в памяти параллельно с другими операциями станет легче.

Давайте решим ещё одну задачу:

$$
\begin{array}{rr}
 & 647\ (600 + 40 + 7) \\
 & \times\quad 4 \\
\hline
600 \times 4 = & 2400 \\
40 \times 4 = & +\ 160 \\
\hline
 & 2560 \\
7 \times 4 = & +\quad 28 \\
\hline
 & 2588
\end{array}
$$

Даже если числа большие, сам процесс прост. Например:

$$
\begin{array}{rr}
 & 987\ (900 + 80 + 7) \\
 & \times\quad 9 \\
\hline
900 \times 9 = & 8100 \\
80 \times 9 = & +\ 720 \\
\hline
 & 8820 \\
7 \times 9 = & +\quad 63 \\
\hline
 & 8883
\end{array}
$$

Когда вы впервые решаете такие задачки, то должно быть поглядываете на записи, дабы напомнить себе, какое было изначальное условие. По-началу это нормально. Но попытайтесь избавиться от данной привычки, чтобы со временем научиться удерживать задачу целиком в памяти.

В прошлом разделе об умножении типа «2-на-1» мы увидели, что примеры, включающие в себя числа с пятёркой на конце, особенно лёгкие в решении. Это же верно и для задач типа «3-на-1»:

$$\begin{array}{rr} & 563\ (500 + 60 + 3) \\ & \times\quad 6 \\ \hline 500 \times 6 = & 3000 \\ 60 \times 6 = & 360 \\ 3 \times 6 = & +\quad 18 \\ \hline & 3378 \end{array}$$

Обратите внимание, что всякий раз, когда первый результат умножения получается кратным 1000, следующая проблема сложения уже вовсе не проблема. Это потому, что вам не нужно запоминать никакие числа и порядковый номер тысячи не меняется. Если бы вы решали эту задачу (см. выше) перед кем-то, то могли бы сказать вслух «три тысячи…» с абсолютной уверенностью в том, что число в уме не превратит ответ в 4000. (В качестве дополнительного бонуса, называя первые цифры, вы создаёте иллюзию, будто мгновенно вычислили ответ!) Но даже если вы тренируетесь в одиночестве, проговаривание первых результатов вслух освобождает часть оперативной памяти, пока вы продолжаете работу над оставшимися действиями задачи типа «2-на-1», результаты решения котороый вы так же можете произнести вслух, например, «…триста семьдесят восемь.»

Попробуйте такой подход при решении следующей проблемы, где множителем выступает 5:

$$\begin{array}{rr} & 663\ (600+60+3) \\ & \times\quad 5 \\ \hline 600\times 5= & 3000 \\ 60\times 5= & 300 \\ 3\times 5= & +\quad 15 \\ \hline & 3315 \end{array}$$

Так как первые две цифры трёхзначного числа одинаковые, вы можете произносить ответ паралелльно с вычислениями даже без необходимости складывать что-либо! Разве вам не хотелось бы, чтобы все задачки на умножение были такими лёгкими?

Давайте поднимемся на новый уровень сложности и попробуем решить пару примеров, которые требуют от нас держать в уме числа.

$$\begin{array}{rr} & 184\ (100+80+4) \\ & \times\quad 7 \\ \hline 100\times 7= & 700 \\ 80\times 7= & +\ 560 \\ \hline & 1260 \\ 4\times 7= & +\quad 28 \\ \hline & 1288 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} & 684\ (600+80+4) \\ & \times\quad 9 \\ \hline 600\times 9= & 5400 \\ 80\times 9= & +\ 720 \\ \hline & 6120 \\ 4\times 9= & +\quad 36 \\ \hline & 6156 \end{array}$$

В следующих двух примерах вам нужно держать числа в уме на последнем этапе решения, а не в его начале:

$$
\begin{array}{rr}
 & 648\ (600 + 40 + 8) \\
 & \times \quad 9 \\ \hline
600 \times 9 = & 5400 \\
40 \times 9 = & +\ 360 \\ \hline
 & 5760 \\
8 \times 9 = & +\ \ 72 \\ \hline
 & 5832
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rr}
 & 376\ (300 + 70 + 6) \\
 & \times \quad 4 \\ \hline
300 \times 4 = & 1200 \\
70 \times 4 = & +\ 280 \\ \hline
 & 1480 \\
6 \times 4 = & +\ \ 24 \\ \hline
 & 1504
\end{array}
$$

Первое действие для каждой задачи легко произвести в уме. Сложности наступают, когда необходимо удержать в памяти предварительный ответ, параллельно вычисляя итоговый. В случае с первой задачей, легко сложить 5400 + 360 = 5760. Но вы будете вынуждены повторять «5760» самому себе несколько раз, пока умножаете 8 x 9 = 72. Затем складываем 5760 + 72. Иногда, на этой стадии, я начинаю проговаривать ответы вслух ещё до завершения. Так как я знаю, что нужно будет держать числа в уме, когда я буду складывать 60 + 72, то я также знаю, что 5700 станет 5800. Я говорю:

«пятьдесят восем сотен (пять тысяч восемь сот)…» Затем я приостанавливаюсь для сложения 60 = 72 = 132. Потому что я уже держу числа в уме, я произношу только последние две цифры: «… тридцать два!» А вот и ответ: 5832.

Обе следующие задачи требуют от вас держать два числа в уме, так что их решение может занять больше времени, чем ранее. Но с практикой вы станете быстрее:

$$
\begin{array}{rr l}
 & 489 & (400 + 80 + 9) \\
 & \underline{\times \quad 7} & \\
400 \times 7 = & 2800 & \\
80 \times 7 = & \underline{+\ 560} & \\
 & 3360 & \\
9 \times 7 = & \underline{+\quad 63} & \\
 & 3423 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rr l}
 & 224 & (200 + 20 + 4) \\
 & \underline{\times \quad 9} & \\
200 \times 9 = & 1800 & \\
20 \times 9 = & \underline{+\ 180} & \\
 & 1980 & \\
4 \times 9 = & \underline{+\quad 36} & \\
 & 2016 &
\end{array}
$$

Когда вы впервые принимаетесь за решение таких примеров, повторяйте ответ для каждого действия вслух, параллельно вычисляя остальное. В первой задаче, например, начните с: «Двести восемьдесят (двадцать восем сотен) плюс пятьсот шестьдесят (пять сотен шестьдесят)», проговорив пару раз всё это вслух, тем самым закрепив два числа в памяти, пока складываете их. Повторите ответ -

«три тысячи триста тридцать (тридцать три сотни шестьдесят)» - несколько раз, пока умножаете 9 x 7 = 63. После повторяйте «три тысячи триста тридцать (тридцать три сотни шестьдесят) плюс шестьдесят три» вслух до тех пор, пока не вычислите итоговый ответ 3423. Если вы достаточно быстро соображаете, чтобы распознать то, что сложение 60 + 63 потребует от вас удержать в уме 1, тогда вы в состоянии озвучить итоговый ответ на долю секунды быстрее, чем сами это осознаете - «три тысячи четыреста (тридцать четыре сотни) и… двадцать три!»

Давайте завершим раздел с задачами на умножение типа «3-на-1» рядом особых примеров, которые вы можете мгновенно решить, так как они требуют лишь одного действия на сложение, вместо двух:

$$\begin{array}{rr} & 511\ (500 + 11) \\ & \times \quad 7 \\ \hline 500 \times 7 = & 3500 \\ 11 \times 7 = & +\quad 77 \\ \hline & 3577 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} & 925\ (900 + 25) \\ & \times \quad 8 \\ \hline 900 \times 8 = & 7200 \\ 25 \times 8 = & +\ 200 \\ \hline & 7400 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} & 825\ (800 + 25) \\ & \times \quad 3 \\ \hline 800 \times 3 = & 2400 \\ 25 \times 3 = & +\quad 75 \\ \hline & 2475 \end{array}$$

В общем случае, если результат умножения последних двух цифр первого числа на его множитель известен вам и без подсчётов (например, вы можете знать, что 25 x 8 = 200, так как 8 четвертаков равны $2,00), то вы сможете получить итоговый ответ намного быстрее. Например, если вам без расчётов известно, что 75 x 4 = 300, то легко будет посчитать 975 x 4:

$$
\begin{array}{rr}
 & 975\ (900 + 75) \\
 & \times\ \ \ \ 4 \\ \hline
900 \times 4 = & 3600 \\
75 \times 4 = & +\ \ 300 \\ \hline
 & 3900
\end{array}
$$

Чтобы закрепить только что пройденное, решите следующие задачки на умножение типа «3-на-1» в уме; затем проверьте свои вычисления и ответы, используя наши (в конце книги). Я могу вас уверить из собственного опыта в том, что устные вычисления сродни катанию на велосипеде или печатанию. Это может казаться невозможным по-началу, но как только вы всё освоите, то уже никогда не забудете как это делается.

Упражнение: умножение типа «3-на-1»

1. 431×6
2. 637×5
3. 862×4
4. 957×6
5. 927×7
6. 728×2
7. 328×6
8. 529×9
9. 807×9
10. 587×4

11. 184×7	12. 214×8	13. 757×8	14. 259×7	15. 297×8
16. 751×9	17. 457×7	18. 339×8	19. 134×8	20. 611×3
21. 578×9	22. 247×5	23. 188×6	24. 968×6	25. 499×9
26. 670×4	27. 429×3	28. 862×5	29. 285×6	30. 488×9
31. 693×6	32. 722×9	33. 457×9	34. 767×3	35. 312×9
36. 691×3				

Возведение в квадрат двузначных чисел

Возводить числа в квадрат в уме (умножать число само на себя) одно из наиболее лёгких, но в то же время, и одно из наиболее впечатляющих ловкачеств из арсенала устных вычислений. Я до сих пор помню, где я находился, когда открыл для себя это. Мне было тринадцать. Я сидел в автобусе, который вёз меня навестить отца на работе в центр Кливленда. Это была привычная поездка для меня, поэтому мысли начали блуждать. Я не помню почему, но я начал думать о числах, которые в сумме дают 20. И я задумался о том, каким большим может быть результат действий с этими числами?

Я начал с середины, 10 x 10 (или 10^2), результатом чего является 100. Затем, я умножил 9 x 11 = 99, 8 x 12 = 96, 7 x 13 = 91, 6 x 14 = 84, 5 x 15 = 75, 4 x 16 = 64, и так далее. Я обратил внимание на то, что результат каждый раз уменьшается. И разница между ним и 100 была 1,4,9,16,25,36, . . . или 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, . . . (смотри таблицу ниже)

Числа, дающие в сумме 20		Расстояние до 10	Их произведение	Произведение их разницы от 100
10	10	0	100	0
9	11	1	99	1
8	12	2	96	4
7	13	3	91	9
6	14	4	84	16
5	15	5	75	25
4	16	6	64	36
3	17	7	51	49
2	18	8	36	64
1	19	9	19	81

Мне данный паттерн представился удивительным. Затем я опробовал числа, дающие в сумме 26, и результаты были похожими. Первым делом я прорешал примеры 13^2 = 169, затем 12 x 14 = 168, 11 x 15 = 165, 10 x 16 = 160, 9 x 17 = 153, и так далее. Как и прежде, расстояния этих произведений от 169 равнялись 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, и так далее (смотри таблицу ниже).

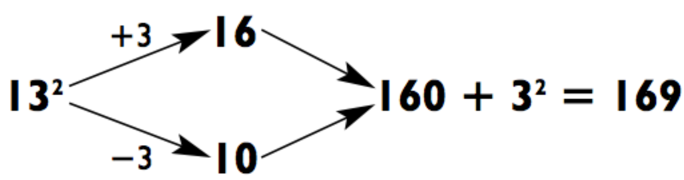
На самом деле, существует простое алгебраичиское объяснение данного феномена (смотри «Почему эти приёмы работают»). Но в то время, я не разбирался в алгебре достаточно хорошо, чтобы доказать постоянство появления данного паттерна, но я провёл достаточное количество экспериментов с подобными примерами, чтобы убедиться в его существовании.

Затем я осознал, что данный шаблон может помочь мне сделать возведение чисел в квадрат намного легче. Предположим, я хотел возвести в квадрат 13. Вместо того, чтобы умножать 13 x 13,

Числа, дающие в сумме 26		Расстояние от 13	Их произведение	Расстояние их произведения от 169
13	13	0	169	0
12	14	1	168	1
11	15	2	165	4
10	16	3	160	9
9	17	4	153	16
8	18	5	144	25

почему бы не получить приближённый ответ, используя два числа, которые легче перемножить, но которые также дают в сумме 26? Я выбрал 10 x 16 = 160. Чтобы получить итоговый ответ, я просто прибавил $3^2 = 9$ (так как 10 и 16 находятся на расстоянии 3 от 13). Таким образом, $13^2 = 160 + 9 = 169$. Всё чётко!

Данный метод схематически можно представить так:



А теперь давайте посмотрим, как это работает с квадратом другого числа:

$$\begin{tikzcd} & 42 \arrow[dr] & \\ 41^2 \arrow[ur, "+1"] \arrow[dr, "-1"'] & & 1680 + 1^2 = 1681 \\ & 40 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Чтобы возвести в квадрат 41, вычтем 1 для получения 40 и добавим 2 для получения 42. Далее умножаем 40 х 42. Без паники! Это простое умножение типа «2-на-1» под прикрытием (4 х 42, в частности). Так как 4 х 42 = 168, 40 х 42 = 1680. Почти всё! Вам необходимо лишь прибавить квадрат 1 (числа, на величину которого вы уменьшали и увеличивали 41), чтобы получить 1680 + 1 = 1681.

Способно ли возведение в квадрат двузначных чисел быть таким лёгким? Да, с использованием этого метода и небольшим количеством практики, может. И это работает в независимости от того, округляете ли вы исходное число в большую или меньшую сторону.

Например, давайте проверим 77^2, округлив его во время решения в обе стороны:

$$\begin{tikzcd} & 84 \arrow[dr] & \\ 77^2 \arrow[ur, "+7"] \arrow[dr, "-7"'] & & 5880 + 7^2 = 5929 \\ & 70 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

или

$$\begin{tikzcd} & 80 \arrow[dr] & \\ 77^2 \arrow[ur, "+3"] \arrow[dr, "-3"'] & & 5920 + 3^2 = 5929 \\ & 74 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

В данном примере преимущество округления в большую сторону состоит в том, что вы практически уже получили решение, осталось лишь просто прибавить 9 к числу с 0 на конце!

По сути, я всегда округляю по принципу большей близости к 10. Так, если возводимое в квадрат число оканчивается на 6, 7, 8, или 9, то округление в большую сторону. И если возводимое в квадрат число оканчивается на 1, 2, 3, или 4, то округление в меньшую сторону. (если число оканчивается на 5, то сразу оба!) Придерживаясь данной стратегии, вы ограничитесь лишь прибавлением чисел 1, 4, 9, 16 или 25 к результатам первой калькуляции.

Давайте рассмотрим другой пример. Вычислите 56^2 в уме самостоятельно, прежде чем смотреть на наше решение ниже:

$$\begin{tikzcd}
& 60 \arrow[dr] & \\
56^2 \arrow[ur, "+4"] \arrow[dr, "-4"'] & & 3120 + 4^2 = 3136 \\
& 52 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Возведение в квадрат чисел, оканчивающихся на 5 ещё легче. Так как вы каждый раз будете округлять в любую из сторон на величину 5; числа, которые нужно будет перемножить, будут кратны 10. Следовательно, умножение и сложение покажутся особенно простыми. Ниже представлены решения для 85^2 и 35^2:

$$\begin{tikzcd}
& 90 \arrow[dr] & \\
85^2 \arrow[ur, "+5"] \arrow[dr, "-5"'] & & 7200 + 5^2 = 7225 \\
& 80 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

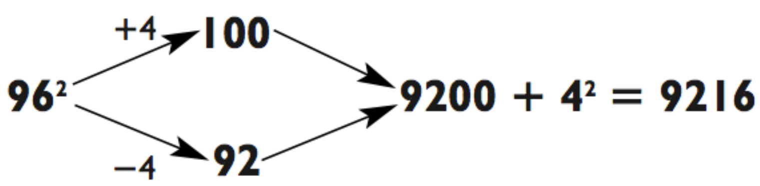
$$\begin{tikzcd}
& 40 \arrow[dr] & \\
35^2 \arrow[ur, "+5"] \arrow[dr, "-5"'] & & 1200 + 5^2 = 1225 \\
& 30 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Как вы можете знать из Главы 0, когда происходит возведение в квадрат чисел, оканчивающихся на 5, округление в большую и меньшую стороны позволяет вам немедленно «выпаливать» первую часть ответа, а потом заканчивать его числом 25. Например, когда вы хотите посчитать 75^2, округление до 80 и 70 даст вам: «пятьсот шестьдесят (пятьдесят шесть сотен) и… двадцать пять!»

Что касается чисел, оканчивающихся на 5, у вас не должно возникнуть проблем с разгромом кого-либо с калькулятором в руке. А после небольшого количества практики с другими примерами на возведение в квадрат, момент, когда вы сможете победить калькулятор в борьбе по возведению в квадрат, не заставит себя долго ждать. Вы даже не испугаетесь больших чисел. Вы можете попросить кого-нибудь загадать вам действительно большое двузначное число, что-нибудь на подобие 90>, и это будет выглядеть, будто вы взяли на себя непосильную задачу.

Но на самом деле это ещё легче, потому что у вас будет возможность округлить до 100.

Давайте представим, что ваша аудитория задала вам 96^2. Сначала попробуйте сами, а уже потом смотрите на наше решение:



Не было ли это легко? Вам следовало округлить с помощью 4 до 100 и округлить с помощью 4 до 92, а затем умножить 100 x 92 для получения 9200. В этот момент вы можете проговорить вслух: «Девять тысяч двести (девяносто две сотни)…» и после закончив, используя «шестнадцать». И наслаждаться аплодисментами.

Упражнение: возведение в квадрат двузначных чисел

Посчитайте следующее:

1. 14^2	2. 27^2	3. 65^2	4. 89^2	5. 98^2
6. 31^2	7. 41^2	8. 59^2	9. 26^2	10. 53^2
11. 21^2	12. 64^2	13. 42^2	14. 55^2	15. 75^2
16. 45^2	17. 84^2	18. 67^2	19. 103^2	20. 208^2

Зера Колберн: занимательные расчёты

Одним из первых молниеносных вычислителей, который смог извлечь выгоду из своего таланта был Зера Колберн (1804-1839), сын американского фермера из Вермонта, который выучил таблицу умножения до 100 даже раньше, чем он начал читать и писать. В возрасте шести лет, отец молодого Зеры взял его с собой в тур, где его выступления создали достаточный капитал для того, чтобы отправить его в школу в Париже и Лондоне. В возрасте восьми лет он был известен во всём мире, выступал со своими молниеносными расчётами в Англии и был охарактеризован в Annual Register как «возможно самый исключительный феномен в истории человеческого разума из когда-либо существующих». В не меньшей степени Майкл Фарадей и Сэмюэл Морзе восхищались им.

Вне зависимости от того, куда он направлялся, Колберн встречал всех своих соперников со скоростью и точностью. Он рассказывает нам в своей автобиографии о наборе задачек, которые ему задали в Нью-Гемпшире в июне 1811: «Сколько дней и часов прошло с момента рождения Христа 1811 лет назад? Ответил за двадцать секунд : 661 015 дней, 15 864 360 часов. Сколько секунд содержится в одиннадцати годах? Ответил за четыре секунды: 346 896 000." Колберн использовал методы, описанные в этой книге, чтобы производить вычисления задчач, которые ему задают, полностью в уме. Например, он бы разложил большое число на более мелкие и затем умножал бы: однажды Колберн умножил 21734 x 543 путём разложения 543 как 181 x 3. Затем он умножил 21734 x 181, чтобы получить 3 933 854, и, наконец, умножил эту цифру на 3, чтобы получить итог в размере 11 801 562.

Как это часто бывает с молниеносными вычислителями, интерес к удивительным способностям Колберна уменьшилась со временем, и в возрасте двадцати он вернулся в Америку и стал проповедником-методистом. Он умер в юном возрасте тридцати пяти лет. Подытоживая информацию о своих способностях молниеносного вычислителя, и о преимуществах, которые такая способность предоставляет, Колберн размышлял: «Действительно, метод… требует большего количества данных, чем общее правило. Но запомниться то, что ручка, чернила и бумага обходились для Зеры в сумме очень дёшево»

Почему данные приёмы работают?

Этот раздел представлен для учителей, студентов, любителей математики и всех любопытствующих по поводу того, почему этот метод работает. Некоторые из вас найдут теоретическую сторону вопроса не менее интересной, чем практическую. К счастью, вам не нужно разбираться в том, почему данный метод работает, чтобы разобраться в том, как его применять. За всеми магическими трюками скрывается рациональное объяснение. И математические трюки не исключение. И вот, прямо сейчас, матемаг раскрывает свои самые сокровенные тайны!

В этой главе, посвящённой задачкам на умножение, это был распределительный закон, который позволял нам разбивать примеры на части. Данный закон гласит, что для любых чисел *a*, *b* и *c:*

$$(b + c) \times a = (b \times a) + (c \times a)$$

То есть, число за скобками распределяется, или по отдельности применяется, к каждому из чисел в скобках, b и c. Например, в нашей первой задачке на умножение 42 x 7 мы добрались до итогового ответа с помощью представления 42 в виде 40 + 2, а затем распределили 7 следующим образом:

$$42 \times 7 = (40 + 2) \times 7 = (40 \times 7) + (2 \times 7) = 280 + 14 = 294$$

Вы можете задаться вопросом «Почему распределительный закон в принципе работает?» Для интуитивного осознания этого, представьте, что у вас 7 сумок, в каждой по 42 монеты, 40 из которых золотые и 2 серебряные. Сколько всего у вас монет? Существует 2 способа получить ответ. Сперва, исходя из самого определения умножения, у вас 42 x 7 монет. С другой стороны, всего 40 x 7 золотых и 2 x 7 серебряных монет. Следовательно, мы имеем (40 x 7) + (2 x 7) монет вместе. Отвечая на наш вопрос двумя способами, получим 42 x 7 = (40 x 7) + (2 x 7). Обратите внимание, что числа 7, 40, и 2 могут быть заменены любым другим (*a*, *b* или *c*) с сохранением общего логического принципа. Вот почему распределительный метод работает!

Используя схожую аргументацию про золотые, серебряные и медные монеты, мы получаем:

$$(b + c + d) \times a = (b \times a) + (c \times a) + (d \times a)$$

Следовательно, чтобы решить пример 326 x 7, мы разбиваем 326 как 300 + 20 + 6. Затем распределяем 7 следующим образом: 326 x 7 = (300 + 20 + 6) x 7 = (300 x 7) + (20 x 7) + (6 x 7), а потом складываем полученное для получения ответа.

Что касается возведения в квадрат, ниже представленный алгебраический закон оправдывает мой метод. (A и d - любые числа)

$$A^2 = (A + d) \times (A - d) + d^2$$

Здесь, A - число, которое возводится в квадрат; d - любое число, но я выбрал в качестве такого числа отдалённое от A на величину ближайшего кратного 10. Поэтому для 77^2 я установил d = 3, и наша формула подсказывает, что $77^2 = (77 + 3) \times (77 - 3) + 3^2 = (80 \times 74) + 9 = 5929$. Алгебраические отношения следующего вида также объясняют мой метод возведения в квадрат:

$$(z + d)^2 = z^2 + 2zd + d^2 = z(z + 2d) + d^2$$

Следовательно, чтобы возвести в квадрат 41, мы зададим z = 40 и d = 1, чтобы получить:

$$41^2 = (40 + 1)^2 = 40 \times (40 + 2) + 1^2 = 1681$$

Схожим образом,

$$(z - d)^2 = z(z - 2d) + d^2$$

чтобы найти 77^2 w когда z = 80 и d = 3,

$$77^2 = (80 - 3)^2 = 80 \times (80 - 6) + 3^2 = 80 \times 74 + 9 = 5929$$

ГЛАВА 3

Новые и улучшенные произведения: умножение среднего уровня

Матемагия действительно становится захватывающей, когда вы выступаете перед аудиторией. Мой первый опыт публичных выступлений пришёлся на восьмой класс, в довольно «преклонном возрасте» тринадцати лет. Многие матемаги начинали ещё раньше. Зера Колберн (1804-1839), например, как сообщается, мог производить молниеносные расчёты, ещё до того, как научился читать и писать, и он уже развлекал зрителей в возрасте шести лет! Когда мне было тринадцать, мой учитель алгебры записал на доске задачку, ответом для которой было 108^2. Не намереваясь на этом останавливаться, я выпалил: «Квадрат 108 всего лишь 11 664!»

Учитель сделал расчет на доске и получил такой же ответ. Глядя немного напуганно, она произнесла: «Да, верно. Как ты это сделал?» Ну я ей и рассказал: «Я округлил 108 до 100 и увеличил 108 до 116. После я перемножил 116 x 100, получил 11 600, а потом просто прибавил квадрат 8, чтобы получить 11 664.»

Она никогда раньше не сталкивалась с таким методом. Я был взволнован. Мысли о «Теореме Бенджамина» приходили мне в голову. Я на самом деле верил в то, что открыл нечто новое. Когда я в конце концов наткнулся на данный метод спустя несколько лет в книге Мартина Гарднера по рекреационной математике «Математический крнавал» (1965), мой день был испорчен! Хотя тот факт, что я сам пришёл к этому, был очень воодушевляющим.

Вы тоже можете произвести впечатление на своих друзей (или учителей), используя некоторые из довольно удивительных расчётов на умножение. В конце прошлой Главы вы узнали, как умножить двузначное число само на себя. В этой главе вы узнаете, как перемножить два разных двузначных числа - сложное, но ещё более творческое задание. Затем вы попробуете приложить свою руку (или, точнее, ваш мозг) к возведению трёхзначных чисел в квадрат. Вам нет необходимости знать, как решать задачи на умножение двух двузначных чисел, чтобы решать задачи по возведению в квадрат трёхзначных, так что вы можете начать изучение с любого из навыков.

Задачи на умножение типа «2-на-2»

Когда вы возводите в квадрат двузначное число, метод всегда одинаковый. Однако, когда вы перемножаете двузначные числа, то вы можете использовать множество разных методов, которые приведут вас к одному и тому же ответу. Лично для меня, здесь и начинается самое весёлое.

Метод сложения

Чтобы использовать метод сложения для перемножения двух двузначных чисел, вам всего лишь необходимо решить две задачки на умножение типа «2-на-1» и сложить результаты. Например:

$$
\begin{array}{rr}
 & 46 \\
 & \times \underline{\quad 42} \; (40 + 2) \\
40 \times 46 = & 1840 \\
2 \times 46 = & \underline{+ \quad 92} \\
 & 1932
\end{array}
$$

Здесь вы разбиваете 42 на 40 и 2: два числа, на которые легко потом умножать. После вы умножаете 40 x 46, а это всего лишь 4 x 46 с добавочным 0, или 1840. Затем вы умножаете 2 x 46 = 92. Наконец, вы складываете 1840 + 92 = 1932, как и показано выше.

Вот ещё один способ решения той же задачи:

$$\begin{array}{rr}
 & 46\ (40+6) \\
 & \times\ \ 42 \\
\hline
40 \times 42 = & 1680 \\
6 \times 42 = & +\ 252 \\
\hline
 & 1932
\end{array}$$

Подвох в том, что умножить 6 х 42 сложнее, чем умножить 2 х 46, как в первой задаче. Более того, прибавить 1680 + 252 сложнее, чем 1840 + 92. Так как определиться с тем, какое из чисел разбить на части? Я стараюсь выбирать число, действия над которым приведут к более простой задаче на сложение. В большинстве случаев, но не всегда, вам будет хотеться разбить число с наименьшей цифрой на конце, потому что это обычно выливается в меньшее число для сложения в будущем.

А сейчас попробуйте свои силы на следующих примерах:

$$\begin{array}{rr}
 & 48 \\
 & \times\ \ 73\ (70+3) \\
\hline
70 \times 48 = & 3360 \\
3 \times 48 = & +\ 144 \\
\hline
 & 3504
\end{array}$$

$$\begin{array}{rr}
 & 81\ (80+1) \\
 & \times\ \ 59 \\
\hline
80 \times 59 = & 4720 \\
1 \times 59 = & +\ \ 59 \\
\hline
 & 4779
\end{array}$$

В последнем примере проиллюстрировано то, почему числа с 1 на конце так привлекательны для разбиения. Если оба числа оканчиваются на одинаковую цифру, вам следует делить на части более крупное число, как показано ниже:

$$
\begin{array}{rr}
 & 84\ (80 + 4) \\
 & \underline{\times \quad 34} \\
80 \times 34 = & 2720 \\
4 \times 34 = & \underline{+\ 136} \\
 & 2856
\end{array}
$$

Если одно из чисел на много больше другого, то его разбиение часто оправдывает себя, даже если цифра на конце больше. Вы поймёте, что я имею в виду, когда прорешаете следующие задачи двумя разными способами:

$$
\begin{array}{rr}
 & 74\ (70 + 4) \\
 & \underline{\times \quad 13} \\
70 \times 13 = & 910 \\
4 \times 13 = & \underline{+\ 52} \\
 & 962
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr}
 & 74 \\
 & \underline{\times \quad 13}\ (10 + 3) \\
10 \times 74 = & 740 \\
3 \times 74 = & \underline{+\ 222} \\
 & 962
\end{array}
$$

Показался ли вам первый способ быстрее второго? Мне показался. Вот ещё одно исключение из правила «разбивайте на части число с наименьшей цифрой на конце». Когда вы будете умножать число типа 50> на чётное число, вам захочется разбить на части именно число типа 50>:

$$
\begin{array}{rr}
 & 84 \\
 & \underline{\times \quad 59}\ (50 + 9) \\
50 \times 84 = & 4200 \\
9 \times 84 = & \underline{+\ 756} \\
 & 4956
\end{array}
$$

Цифра на конце у числа 84 меньше, чем у числа 59. Но если вы разделите на части 59, результаты умножения будут кратны 100, прямо как 4200 из примера выше. Это делает последующие задачи на сложение многим легче.

А теперь опробуйте лёгкую задачку другого типа:

$$\begin{array}{rr} & 42 \\ & \underline{\times\ 11}\ (10 + 1) \\ 10 \times 42 = & 420 \\ 1 \times 42 = & \underline{+\ 42} \\ & 462 \end{array}$$

Хотя вычисления, показанные выше, достаточно простые, существует ещё более лёгкий и быстрый способ умножения числа на 11. Это математия во всей своей красе: вы не поверите своим глазам, когда увидите это! (если вы, конечно, ещё не забыли про Главу 0)

Вот как это работает. Представьте себе двузначное число, цифры которого в сумме дают 9 или меньше. Для умножения такого числа на 11, просто сложите эти две цифры и вставьте полученную сумму между двух исходных цифр. Например, чтобы умножить 42 x 11, сначала сложите 4 + 2 = 6. Если вы поместите 6 между 4 и 2, то получите 462, что и является решением!

$$\begin{array}{r} 42 \\ \underline{\times\ 11} \end{array} \qquad \begin{array}{c} 4\_\_2 \\ 6 \end{array} \qquad = 462$$

Решите 54 x 11, используя данный метод.

$$\begin{array}{r} 54 \\ \underline{\times\ 11} \end{array} \qquad \begin{array}{c} 5\_\_4 \\ 9 \end{array} \qquad = 594$$

$$
\begin{array}{rr}
 & 89 \\
 & \times \quad 72\ (70+2) \\
\hline
70 \times 89 = & 6230 \\
2 \times 89 = & +\ 178 \\
\hline
 & 6408
\end{array}
$$

Если вы получили правильный ответ с первого или второго раза, похлопайте себя по спине. В действительности, не найдётся задач на умножение типа «2-на-2» труднее этой. Если вы не получили ответ сразу, не волнуйтесь. В следующих двух разделах я обучу вас гораздо более лёгким стратегиям для решения подобных задач. Но прежде, чем вы продолжите чтение, попрактикуйте метод сложения на следующих задачах на умножение.

Упражнение: метод сложения для умножения типа «2-на-2»

1. $\begin{array}{r} 31 \\ \times\ 41 \\ \hline \end{array}$

2. $\begin{array}{r} 27 \\ \times\ 18 \\ \hline \end{array}$

3. $\begin{array}{r} 59 \\ \times\ 26 \\ \hline \end{array}$

4. $\begin{array}{r} 53 \\ \times\ 58 \\ \hline \end{array}$

5. $\begin{array}{r} 77 \\ \times\ 43 \\ \hline \end{array}$

6. $\begin{array}{r} 23 \\ \times\ 84 \\ \hline \end{array}$

7. $\begin{array}{r} 62 \\ \times\ 94 \\ \hline \end{array}$

8. $\begin{array}{r} 88 \\ \times\ 76 \\ \hline \end{array}$

9. $\begin{array}{r} 92 \\ \times\ 35 \\ \hline \end{array}$

10. $\begin{array}{r} 34 \\ \times\ 11 \\ \hline \end{array}$

11. $\begin{array}{r} 85 \\ \times\ 11 \\ \hline \end{array}$

Метод вычитания

Метод вычитания действительно может пригодиться, когда одно из умножаемых чисел заканчивается на 8 или 9. Следующий пример иллюстрирует то, что я имею в виду:

$$
\begin{array}{rr}
 & 59\ (60-1) \\
 & \times\quad 17 \\
\hline
60 \times 17 = & 1020 \\
-1 \times 17 = & -\quad 17 \\
\hline
 & 1003
\end{array}
$$

Хотя большинство людей находит сложение легче вычитания, обычно бывает легче отнять маленькое число, нежели прибавить большое. (Если бы мы решали эту задачу методом сложения, то прибавили бы 850 + 153 = 1003)

А теперь давайте возьмёмся за сложную задачу из концовки последнего раздела:

$$
\begin{array}{rr}
 & 89\ (90-1) \\
 & \times\quad 72 \\
\hline
90 \times 72 = & 6480 \\
-1 \times 72 = & -\quad 72 \\
\hline
 & 6408
\end{array}
$$

Разве это не намного проще? Теперь задача, где одно из чисел оканчивается на 8:

$$
\begin{array}{rr}
 & 88\ (90-2) \\
 & \times\quad 23 \\
\hline
90 \times 23 = & 2070 \\
-2 \times 23 = & -\quad 46 \\
\hline
 & 2024
\end{array}
$$

В данном случае вам следует поступить с 88 так: отнимите 90 - 2, затем умножьте 90 x 23 = 2070. Но вы умножили с перебором. Какой перебор? Его размер 2 x 23, или 46. Так что вычтите 46 из 2070 для получения итогового ответа 2024.

Я хочу подчеркнуть, что важным является прорешивание данных примеров в уме, а не просто изучение того, как мы это сделали на схемах. Пропускайте через себя эти задачки, обозначайте действия или даже проговаривайте вслух, дабы подкрепить ваши мысли.

Я использую метод вычитания не только для чисел, оканчивающихся на 8 или 9, но и для чисел типа 90>, потому что 100 является очень удобным числом для умножения. Например, если кто-то попросит меня умножить 96 x 73, я незамедлительно округлю 96 до 100:

$$
\begin{array}{rr}
 & 96\ (100 - 4) \\
 & \times\ \ 73 \\
\hline
100 \times 73 = & 7300 \\
-4 \times 73 = & -\ \ 292 \\
\hline
 & 7008
\end{array}
$$

Когда действие на вычитание внутри задачи на умножение требует от вас держать числа в уме, использование дополнений (которые мы изучили в Главе 1) способно помочь вам ускорить получение ответа. Вы поймёте, о чём я говорю, когда поработаете над задачами ниже. Например, вычтите 340 - 78. Нам известно, что ответ будет в районе 200>. Разница между 40 и 78 это 38. Теперь используйте дополнение 38, чтобы получить 62. Это и будет ответ - 262!

$$
\begin{array}{r}
340 \\
-\ \ 78 \\
\hline
262
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
78 - 40 = 38 \\
\text{ДОПОЛНЕНИЕ } 38 = 62
\end{array}
$$

А теперь другая задачка:

$$
\begin{array}{rr}
 & 88\ (90 - 2) \\
 & \times\quad 76 \\ \hline
90 \times 76 = & 6840 \\
-2 \times 76 = & -\ 152 \\ \hline
\end{array}
$$

Существует два пути реализации действия на вычитания внутри данной задачи. «Длинный» путь состоит из вычитания 200 и прибавления 48:

$$\underbrace{6840 - 152 \quad = \quad 6640}_{\text{СНАЧАЛА ОТНИМАЕМ 200}} \underbrace{\,+\, 48 \quad = \quad 6688}_{\text{ЗАТЕМ ПРИБАВЛЯЕМ 48}}$$

«Короткий» путь заключается в осознании того, что ответ будет 6600 (66 сотен) и «сколько-то там». Для определения этого «сколько-то там», мы отнимаем 52 - 40 = 12, а затем находим дополнение 12, которое равно 88. Следовательно, ответ 6688.

Попробуйте этот пример.

$$
\begin{array}{rr}
 & 67 \\
 & \times\quad 59\ (60 - 1) \\ \hline
60 \times 67 = & 4020 \\
-1 \times 67 = & -\quad 67 \\ \hline
 & 3953
\end{array}
$$

И снова, вы можете увидеть, что ответ будет 3900 и сколько-то там. Так как 67 - 20 = 47, а дополнением будет 53, это означает, что ответ 3953.

Как вы могли понять, использование данного метода возможно с любой задачей на вычитание, которая требует от вас держать числа в уме, а не только тогда, когда она является частью решения задачи на умножение. Все это является ещё одним доказательством того (если вам нужны доказательства), что дополнения являются очень мощным инструментом в математии. Освойте эту технику, и довольно скоро люди начнут рассыпаться в комплементах в ваш адрес!

Упражнение: метод вычитания для умножения типа «2-на-2»

1. 29×45
2. 98×43
3. 47×59
4. 68×38
5. 96×29
6. 79×54
7. 37×19
8. 87×22
9. 85×38
10. 57×39
11. 88×49

Факторинговый метод

Факторинговый метод - мой любимый метод умножения двузначных чисел, так как он совсем не включает в себя ни сложение, ни вычитание. Вы используете его, когда одно из чисел в примере может быть разложено (факторизованно) на числа, состоящие из одной цифры.

Факторизовать число - значит разбить его на «одноцифровые» числа, которые при перемножении дадут исходное число. Например, число 24 может быть фактаризованно в виде 8 x 3 или 6 x 4. (Это также возможно в виде 12 x 2, но мы отдаём предпочтение использованию чисел, состоящих из одной цифры)

Вот несколько других примеров разложенных чисел:

$$42 = 7 \times 6$$
$$63 = 9 \times 7$$
$$84 = 7 \times 6 \times 2 \text{ или } 7 \times 4 \times 3$$

Для того, чтобы увидет, как факторинг делает умножение легче, рассмотрим следующий пример:

$$\begin{array}{r} 46 \\ \underline{\times\ 42} \end{array} = 7 \times 6$$

Ранее мы уже решали этот пример путём умножения 46 x 40, 46 x 2 и их последующего сложения. Чтобы использовать метод факторинга, рассмотрим 42 как 7 x 6 и начнём с умножения 46 x 7, что равняется 322. Затем умножим 322 x 6 для получения итогового ответа 1932. Вы уже знаете, как решать задачки на умножение типа «2-на-1» и «3-на-1», так что это не составит труда:

$$46 \times 42 = 46 \times (7 \times 6) = (46 \times 7) \times 6 = 322 \times 6 = 1932$$

Конечно, эта задача может быть решена и с перестановкой множителей 42:

$$46 \times 42 = 46 \times (6 \times 7) = (46 \times 6) \times 7 = 276 \times 7 = 1932$$

В данном случае легче умножить 322 x 6, чем 276 x 7. Чаще всего я предпочитаю использовать больший множитель при решении исходной задачи типа «2-на-1» и сохраняю меньший множитель для использования его в случае «3-на-1». Следствием факторинга является упрощение задачи на умножение типа «2-на-2» до более лёгкой «3-на-1» (иногда «2-на-1») задачки.

Преимущество метода факторинга для устных вычислений состоит в том, что вам не приходиться слишком многое держать в памяти. Давайте посмотрим на другой пример, 75 x 63:

$$75 \times 63 = 75 \times (9 \times 7) = (75 \times 9) \times 7 = 675 \times 7 = 4725$$

Как и прежде, вы упрощаете этот пример типа «2-на-2» путём разложения 63 на 9 x 7 и затем умножаете 75 на эти числа. (Кстати, причина, по которой мы можем переставить скобки на втором шаге - ассоциативный закон умножения)

$$63 \times 75 = 63 \times (5 \times 5 \times 3) = (63 \times 5) \times 5 \times 3$$
$$= 315 \times 5 \times 3 = 1575 \times 3 = 4725$$

Потренируйтесь на следующем примере:

$$57 \times 24 = 57 \times 8 \times 3 = 456 \times 3 = 1368$$

Вы могли бы разложить 24 как 6 x 4 для перехода к другому лёгкому вычислению:

$$57 \times 24 = 57 \times 6 \times 4 = 342 \times 4 = 1368$$

Сравните данный подход с методом сложения:

$$\begin{array}{rr} & 57 \\ & \underline{\times \quad 24}\ (20+4) \\ 20 \times 57 = & 1140 \\ 4 \times 57 = & \underline{+\ 228} \\ & 1368 \end{array}$$

или

$$\begin{array}{rr} & 57\ (50+7) \\ & \underline{\times \quad 24} \\ 50 \times 24 = & 1200 \\ 7 \times 24 = & \underline{+\ 168} \\ & 1368 \end{array}$$

В рамках метода сложения, вам необходимо решить две задачи типа «2-на-1», а после сложить результаты. В рамках метода факторинга, перед вами только две задачи на умножение: «2-на-1» и «3-на-1». И после вы свободны. Метод факторинга обычно снисходителен к вашей памяти.

Помните эту трудную задачу на умножение из более ранней части Главы? Это снова она:

$$\begin{array}{r} 89 \\ \underline{\times\ 72} \end{array}$$

Мы разобрались с этой задачкой достаточно легко, используя метод вычитания, но факторинг работает ещё быстрее:

$$89 \times 72 = 89 \times 9 \times 8 = 801 \times 8 = 6408$$

Задача особенно облегчается потому, что в середине 801 находится 0. Наш следующий пример показывает, что иногда разложение чисел с целью воспользоваться ситуацией оправдано. Давайте взглянем на два способа вычисления 67 x 42:

$$67 \times 42 = 67 \times 7 \times 6 = 469 \times 6 = 2814$$
$$67 \times 42 = 67 \times 6 \times 7 = 402 \times 7 = 2814$$

Обычно вам следует разложить 42 как 7 x 6, как в первом примере, и следовать правилу «используй больший множитель в первую очередь». Но задачу легче решить, если вы разложите 42 как 6 x 7, потому что это поспособствует созданию числа с 0 по середине, а это облегчит умножение. Я называю такие числа «дружелюбные произведения».

Ниже, поиски дружелюбного произведения в задаче проведены двумя способами:

$$43 \times 56 = 43 \times 8 \times 7 = 344 \times 7 = 2408$$
$$43 \times 56 = 43 \times 7 \times 8 = 301 \times 8 = 2408$$

Не показался ли вам второй способ легче?

Во время использования метода факторинга, будет выгодым отыскать дружелюбное произведение где только можно. Следующий список должен помочь. Я жду от вас не столько его запоминания, как простого ознакомления с ним. С практикой вы научитесь чуять дружелюбные произведения, и этот список станет более значимым.

Числа с дружелюбными произведениями

12: $12 \times 9 = 108$
13: $13 \times 8 = 104$
15: $15 \times 7 = 105$
17: $17 \times 6 = 102$
18: $18 \times 6 = 108$
21: $21 \times 5 = 105$
23: $23 \times 9 = 207$
25: $25 \times 4 = 100$, $25 \times 8 = 200$
26: $26 \times 4 = 104$, $26 \times 8 = 208$

27: $27 \times 4 = 108$

29: $29 \times 7 = 203$

34: $34 \times 3 = 102$, $34 \times 6 = 204$, $34 \times 9 = 306$

35: $35 \times 3 = 105$

36: $36 \times 3 = 108$

38: $38 \times 8 = 304$

41: $41 \times 5 = 205$

43: $43 \times 7 = 301$

44: $44 \times 7 = 308$

45: $45 \times 9 = 405$

51: $51 \times 2 = 102$, $51 \times 4 = 204$, $51 \times 6 = 306$, $51 \times 8 = 408$

52: $52 \times 2 = 104$, $52 \times 4 = 208$

53: $53 \times 2 = 106$

54: $54 \times 2 = 108$

56: $56 \times 9 = 504$

61: $61 \times 5 = 305$

63: $63 \times 8 = 504$

67: $67 \times 3 = 201$, $67 \times 6 = 402$, $67 \times 9 = 603$

68: $68 \times 3 = 204$, $68 \times 6 = 408$

72: $72 \times 7 = 504$

76: $76 \times 4 = 304$, $76 \times 8 = 608$

77: $77 \times 4 = 308$

78: $78 \times 9 = 702$

81: $81 \times 5 = 405$

84: $84 \times 6 = 504$

88: $88 \times 8 = 704$

89: $89 \times 9 = 801$

Ранее в данной Главе вы обучились тому, как можно легко умножать числа на 11. Это обычно оправдывает себя, когда вы используете метод факторинга в ситуации, где один из множителей равен 11, как в данном ниже примере:

$$52 \times 33 = 52 \times 11 \times 3 = 572 \times 3 = 1716$$
$$83 \times 66 = 83 \times 11 \times 6 = 913 \times 6 = 5478$$

Упражнение: метод факторинга для умножения типа «2-на-2»

1. 27×14
2. 86×28
3. 57×14
4. 81×48
5. 56×29
6. 83×18
7. 72×17
8. 85×42
9. 33×16
10. 62×77
11. 45×36
12. 48×37

Подходим к умножению творчески

Я упоминал в начале Главы о том, что задачки на умножение решать одно удовольствие, так как это можно сделать любым количеством способов. Теперь, когда вы знаете, что я имею в виду, давайте применим все три метода, объяснённых в этой Главе, на одной задаче. Начнём с метода сложения.

$$
\begin{array}{rr}
 & 73\ (70+3) \\
 & \times\ \ 49 \\
\hline
70 \times 49 = & 3430 \\
3 \times 49 = & +\ 147 \\
\hline
 & 3577
\end{array}
$$

Теперь метод вычитания:

$$
\begin{array}{rr}
 & 73 \\
 & \times\ \ 49\ (50-1) \\
\hline
50 \times 73 = & 3650 \\
-1 \times 73 = & -\ \ 73 \\
\hline
 & 3577
\end{array}
$$

Обратите внимание: две последние цифры могут быть получены путём сложения 50 + (дополнение 73) = 50 + 27 = 77 или просто путём вычисления дополнения (73 - 50) = дополнение 23 = 77.

И, наконец, метод факторинга:

$$73 \times 49 = 73 \times 7 \times 7 = 511 \times 7 = 3577$$

Поздравляю! Вы освоили умножение типа «2-на-2» и теперь обладаете всеми необходимыми базовыми навыками для быстрых устных калькуляций. Всё что вам нужно для превращения в молниеносного вычислителя - больше практики!

Упражнение: умножение типа «2-на-2» - как угодно!

Многие из следующих упражнений могут быть прорешены более чем одним методом. Попробуйте производить вычисления столькими способами, сколько в принципе придёт вам в голову. Затем сверьте свои ответы и расчёты с нашими в конце книги. Там мы предлагаем различные математические пути решения задач, начиная с самых лёгких (на наш взгляд).

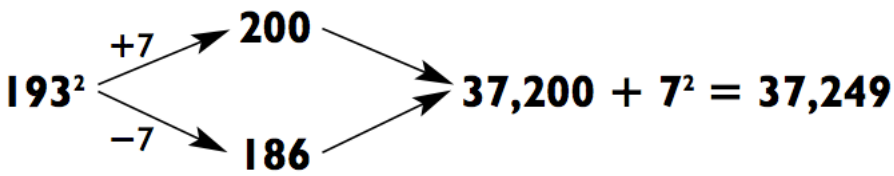
1. 53×39
2. 81×57
3. 73×18
4. 89×55
5. 77×36
6. 92×53
7. 87×87
8. 67×58
9. 56×37
10. 59×21

Следующие задачи типа «2-на-2» являются порождением и подзадачами более крупных задач типа «3-на-2», «3-на-3» и «5-на-5», появление которых ждёт вас позже. Вы можете прорешать эти задачи сейчас в целях практики и снова обратиться к ним, когда они будут использованы в больших примерах.

11. 37×72
12. 57×73
13. 38×63
14. 43×76
15. 43×75
16. 74×62
17. 61×37
18. 36×41
19. 54×53
20. 53×53
21. 83×58
22. 91×46
23. 52×47
24. 29×26
25. 41×15
26. 65×19
27. 34×27
28. 69×78
29. 95×81
30. 65×47
31. 65×69
32. 95×26
33. 41×93

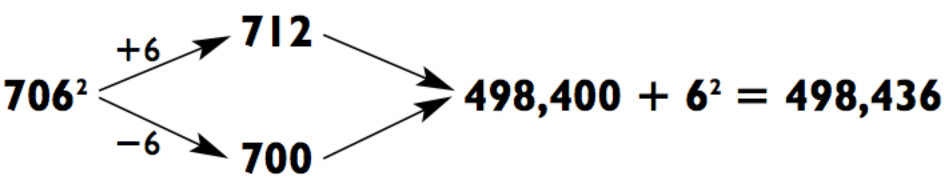
Возведение в квадрат трёхзначных чисел

Возведение в квадрат трёхзначных чисел является впечатляющим проявлением ловкости в рамках ментального фокусничества. Также, как вы возводили в квадрат двузначные числа, округляя в большую или меньшую сторону для получения кратного 10, для возведения трёхзначного числа в квадрат вам нужно округлить его в большую или меньшую сторону для получения кратного 100. Возьмём 193:



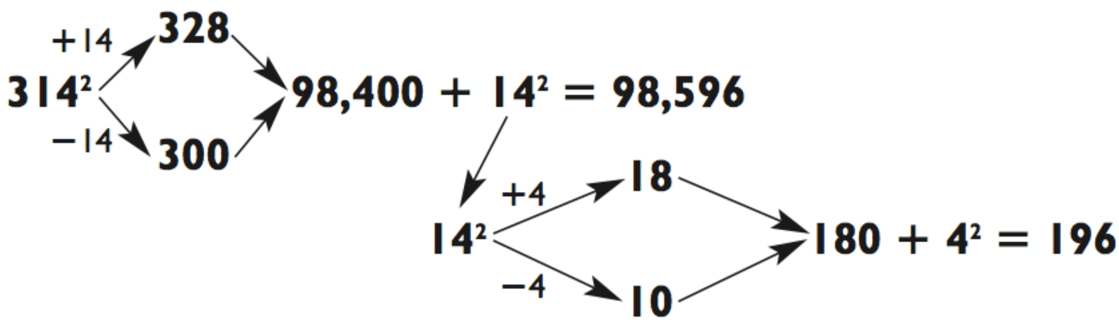
Путём округления в сторону 200 и 186 вы преобразовали задачу типа «3-на-3» в более простую «3-на-1». В конце концов, 200 х 186 это просто 2 х 186 = 372 с двумя нулями в виде приложения. Почти готово! Теперь, всё что вам нужно сделать, это прибавить $7^2 = 49$ для получения 37 249.

Теперь попробуем возвести в квадрат 706:



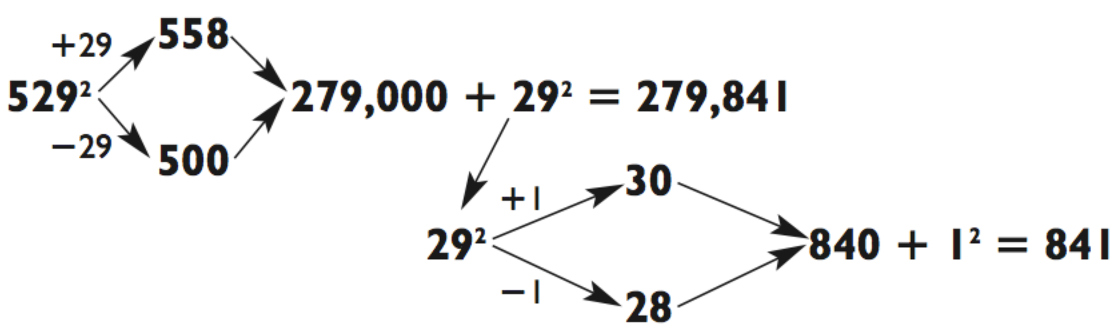
Округление «вниз» на 6 для получения 700 требует от нас округления «вверх» на 6 для получения 712. Так как 712 х 7 = 4984 (простая задача типа «3-на-1»), 712 х 700 = 498 400. После прибавления $6^2 = 36$, вы получаете 498 436.

Последние примеры не являются до ужаса тяжеленными, потому что не включают себя сложения как такового. Более того, вы знаете ответы для 6^2 и 7^2 наизусть. Возводить в квадрат число, которое дальше от кратного 100 более трудное дельце. Попробуйте свои силы с 314^2:

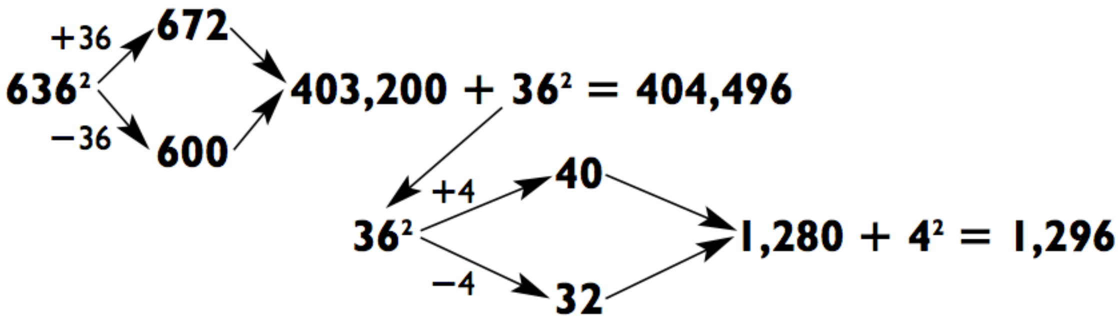


В этом примере на возведение в квадрат трёхзначного числа опуститесь на 14 до 300 и поднимитесь на 14 до 328. Затем перемножьте 328 х 3 = 984. Добавьте два 0 для получения 98 400. Затем прибавьте квадрат 14. Если 14^2 = 196 мгновенно приходит вам на ум (благодаря памяти или вычислениям), то вы в хорошей форме. Просто сложите 98 400 + 196 для получения 98 596. Если вам нужно время для подсчёта 14^2, повторите число 98 400 для себя несколько раз, прежде чем продолжить. (иначе, вы можете вычислить 14^2 = 196 и забыть, к какому числу нужно это прибавить)

Чем дальше вы от кратного 100, тем сложнее становится возведение в квадрат трёхзначного числа. Попробуйте 529^2:

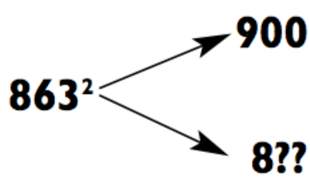


Если у вас есть аудитория, которую вы бы хотели впечатлить, вы можете произнести вслух «279 000», прежде чем рассчитаете 29^2. Но такое не «прокатит» для каждой задачи. Например, попытайтесь возвести в квадрат 636:



Теперь ваш мозг по-настоящему заработал, я прав? Ключ в том, чтобы повторять 403 200 самому себе несколько раз. Затем возвести в квадрат привычным способом 36, дабы получить 1296. Сложная часть наступает, когда необходимо прибавить 1296 к 403 200. Делайте это по одной цифре за раз, слева направо, и это приведёт вас к ответу 404 496. Даю вам слово, что как только вы получше ознакомитесь с возведением в квадрат двузначных чисел, задачки с трёхзначными станут легче.

Вот ещё более трудный пример, 863^2:



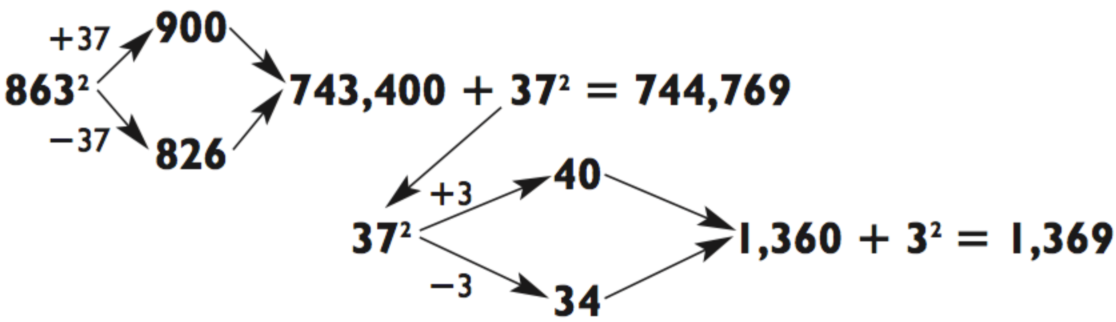
Первая проблема - принятие решения о том, какие числа перемножать. Несомненно, одно из чисел будет 900, а другое 800>. Но какое именно? Вы можете рассчитать это двумя способами:

✤ Сложный способ: разница между 863 и 900 будет 37 (дополнение 63). Вычтите 37 из 863 для получения 826.

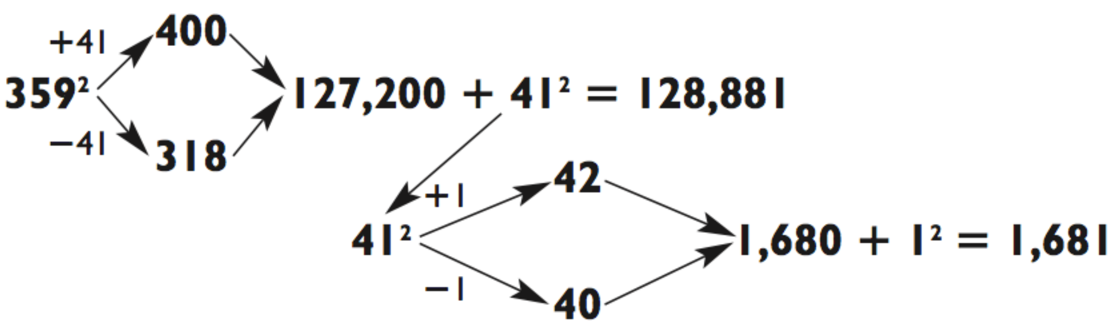
✤ Лёгкий способ: удвойте число 63 для получения 126 и возьмите последние две цифры, которые дадут вам 826.

Вот как работает лёгкий способ. Потому что оба числа на одинаковом расстоянии от 863, их сумма должна выглядеть как удвоенное число 863, или 1726. Одно из чисел 900, значит другое будет 826.

После вы проводите следующие вычисления:

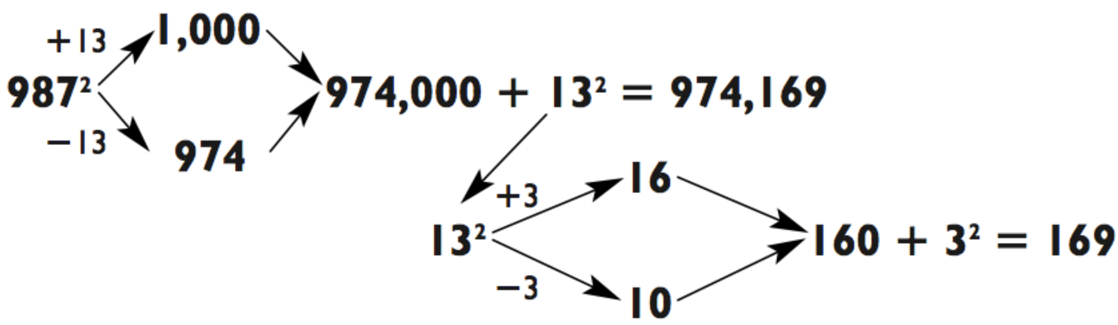


Попробуйте свои силы на возведении в квадрат 359, пока что самой трудной задаче:



Для получения 318, либо отнимите 41 (дополнение 59) от 359, либо умножьте 2 x 59 = 118 и используйте последние две цифры. Далее умножьте 400 x 318 = 127 200. Прибавление 41^2, или 1681, даст вам 128 881. Вот так так! Они не становятся намного сложнее этого! Если вы всё сделали правильно с первого раза, низкий вам поклон!

Давайте завершим этот раздел большой задачкой, которую легко решить, 987^2:



Упражнение: Возведение в квадрат трёхзначных чисел

1. 409^2	2. 805^2	3. 217^2	4. 896^2
5. 345^2	6. 346^2	7. 276^2	8. 682^2
9. 431^2	10. 781^2	11. 975^2	

Что за дверью номер 1?

Математическая банальность 1991 года, которая сделала всех вне себя от ярости, была статьёй Мэрилин Вос Савант (женщина, зарегистрированная Книгой Рекордов Гиннесса как человек с самым высоким в мире IQ) в журнале «Parade». Данный парадокс стали известен как «проблема Монти Холла», и он выглядит следующим образом.

Вы участник «Давайте совершать сделки» (Let's Make a Deal). Монти Холл даёт вам возможность выбрать одну из трёх дверей: за одной из этих дверей большой приз, за двумя другими - козы. Вы выбираете Дверь №2. Но прежде чем Монти показывает приз, который вы выбрали, он показывает вам то, что вы не выбрали за Дверью №3. Это коза. Теперь, в своей дразнящей манере, Монти предоставляет вам другой выбор: вы хотите продолжить с Дверью №2 или вымхотите рискнуть шансом увидеть, что находится за дверью №1? Что вам следует сделать? Если предположить, что Монти собирается показать место, где отсутствует главный приз, то он всегда будет открывать одну из «утешительных дверей». Это оставляет нас с двумя дверями: одна с большим призом, а другая с утешением. Сейчас шансы 50-50 для вашего выбора, не так ли?

Неверно! Шансы, что вы правильно выбрали в первый раз остаются 1 к 3. Вероятность того, что большой приз стоит за другой двери увеличивается до 2 к 3, потому что вероятности в сумме должны давать 1.

Таким образом, путем изменения дверей, вы удвоите шансы на выигрыш! (задача предполагает, что Монти всегда будет давать игроку возможность сделать это, что он всегда будет показывать «невыигрышную» дверь и что, когда ваш первый выбор является правильным, он будет выбирать «невыигрышную» дверь наугад) Поразмышляйте об игре с десятью дверями. И после вашего выбора он раскрывает восемь других «невыигрышных» дверей. Здесь ваши инстинкты, скорее всего, подскажут вам поменять дверь. Люди путают эту проблему с вариантами: если Монти Холл не знает, где главный приз, и раскрывает Дверь № 3, которая, как оказалось, содержит козу (хотя это мог бы быть и приз), то Дверь №1 будет иметь 50-ти процентный шанс быть правильной. Данный результат настолько противоречит здравому смыслу, что Мэрилин Вос Савант получила груды писем (многие от ученых и даже математиков), в которых говорилось, что ей не следовало писать о математике. Все они были неправы.

Возведение в куб

Мы закончим эту главу новым методом для возведения в куб двузначных чисел. (Воскресите в памяти тот факт, что куб числа - это число, умноженное на себя дважды. Например, 5 в кубе - обозначаемое 5^3 — будет равно 5 x 5 x 5 = 125) Как вы убедитесь сами, это не намного труднее, чем умножение двузначных чисел. Метод основан на алгебраическом наблюдении, которое выявило, что

$$A^3 = (A - d)A(A + d) + d^2A$$

где d - любое число. Как и при возведении в квадрат двузначных чисел, я выбираю в качестве d так, чтобы оно было как можно ближе к кратному десяти. Например, когда возвожу в квадрат 13, то d = 3, а результате чего:

$$13^3 = (10 \times 13 \times 16) + (3^2 \times 13)$$

Так как 13 x 16 = 13 x 4 x 4 = 52 x 4 = 208, и 9 x 13 = 117, то мы имеем

$$13^3 = 2080 + 117 = 2197$$

Как на счёт куба 35? Задавая d = 5, мы получаем

$$35^3 = (30 \times 35 \times 40) + (5^2 \times 35)$$

Так как 30 x 35 x 40 = 30 x 1400 = 42 000 и 35 x 5 x 5 = 175 x 5 = 875, мы получаем

$$35^3 = 42{,}000 + 875 = 42{,}875$$

По ходу возведения 49 в куб, мы задаём d = 1 с целью округления до 50. Вот:

$$49^3 = (48 \times 49 \times 50) + (1^2 \times 49)$$

Мы можем решить 48 х 49 с использованием метода факторинга, но для задач такого типа я предпочитаю использовать метод «совместной близости», который будет описан в Главе 8. (Можете забежать вперёд и взглянуть на него уже сейчас, если хотите!) Используя этот метод, мы получаем 48 х 49 = (50 х 47) + (1 х 2) = 2352. Умножив это число на 50, мы получаем 117 600 и вследствие этого

$$49^3 = 117{,}600 + 49 = 117{,}649$$

А вот задачка покрупнее. Попробуйте возвести в куб 92.

$$92^3 = (90 \times 92 \times 94) + (2^2 \times 92)$$

Если вы можете быстро возводить в квадрат двузначные числа, значит вы сможете решить 92 х 94 = 93^2 - 1 = 8648, или вы могли бы использовать метод «совмесной близости», следствие которого 92 х 94 = (90 х 96) + (2 х 4) = 8648. Умножив это число на 9 (как описано в начале Главы 8), мы получим 9 х (8600 + 48) = 77 400 + 432 = 77 832, и, следовательно, 90 х 92 х 94 = 778 320. Так как 4 х 92 = 368, то мы получаем

$$92^3 = 778{,}320 + 368 = 778{,}688$$

Отметим, что при использовании метода «совместной близости» для задач на умножение, возникающих при возведении в куб трёхзначного числа, малое произведение, которое нужно прибавить (в зависимоти от того, равняется ли d = 1, 2, 3, 4, или 5), будет 1 x 2 = 2, 2 x 4 = 8, 3 x 6 = 18, 4 x 8 = 32 либо 5 x 10 = 50. Давайте закончим с кубом 96.

$$96^3 = (92 \times 96 \times 100) + (4^2 \times 96)$$

Произведение 92 x 96 = 8832 может быть посчитано множеством разных способов. Дабы отпраздновать окончание данной Главы, давайте используем некоторые из них. Я начну с самого сложного, на мой взгляд, а закончу наилегчайшим. По результатам метода сложения (90 + 2) x 96 = 8640 + 192 = 8832; по результатам метода вычитания 92 x (100 - 4) = 9200 - 368 = 8832; по результатам метода факторинга 92 x 6 x 4 x 4 = 552 x 4 x 4 = 2208 x 4 = 8832; по результатам возведения в квадрат $94^2 - 2^2$ = 8836 - 4 = 8832; по результатам метода совмесной близости с основой в виде 90, (90 x 98) + (2 x 6) = 8820 + 12 = 8832; и по результатам метода совмесной близости с основой в виде 100, (100 x 88) + (-8 x -4) = 8800 + 32 = 8832.

Произведение 4^2 x 96 = 1536 может быть так же посчитано несколькими способами, такими как 96 x 4 x 4 = 384 x 4 = 1536 или 16 x (100 - 4) = 1600 - 64 = 1536. И наконец, так как 8832 x 100 = 883 200, мы имеем

$$96^3 = 883{,}200 + 1{,}536 = 884{,}736$$

Упражнение: возведение в куб двузначных чисел

1. 12^3	2. 17^3	3. 21^3	4. 28^3	5. 33^3
6. 39^3	7. 40^3	8. 44^3	9. 52^3	10. 56^3
11. 65^3	12. 71^3	13. 78^3	14. 85^3	15. 87^3
16. 99^3				

ГЛАВА 4

Разделяй и властвуй: деление в уме

Деление в уме - чрезвычайно полезный навык, как для бизнеса, так и для быта. Сколько раз в неделю вы сталкиваетесь с ситуациями, которые требуют от вас равного разделения чего-либо, например, счёта в ресторане? Точно такой же навык бывает весьма кстати, когда вы хотите выяснить стоимость за одну упаковку корма для собак или поделить выигрыш во время игры в покер, или узнать, сколько литров бензина вы можете купить на $20. Способность делить в уме может спасти вас от неудобства в виде постоянного обращения к калькулятору, когда вам нужно посчитать что-либо.

В рамках устного деления, метод вычисления слева направо вступает в свои права. Это тот самый метод, которому нас учили в школе, так что вы будете заниматься естественным для вас делом. Я помню, будучи ребёнком, что думал, будто этот метод деления слева направо олицетворяет то, какой арифметика должна быть в принципе. Я часто размышлял о том, что если бы в школе нашли способ преподавать и деление справа налево, они, вероятно, так бы и сделали!

Деление чисел, состоящих из одной цифры

Первый шаг при делении в уме - понимание того, из скольки цифр будет состоять итоговый ответ. Чтобы понять, что я имею в виду, попробуйте следующую задачку вот такого размера:

$$179 \div 7$$

Чтобы решить 179 ÷ 7, мы пытаемся найти число Q, такое, что 7 раз по Q будет 179. Сейчас, так как 179 находится между 7 x 10 = 70 и 7 x 100 = 700, Q должно находиться между 10 и 100. Это означает, что наш ответ является двузначным числом. Зная это, мы сперва определяем наибольшее кратное 10, которое может быть умножено на 7 и в итоге быть меньше 179. Нам известно, что 7 x 20 = 140 и 7 x 30 = 210, значит наш ответ где-то в районе 20>. Отталкиваясь от этого, мы уже можем реально проговорить число «20», так как это будет часть нашего ответа, которая определённо не изменится. Далее мы вычитаем 179 - 140 = 39. Наша задача только что была сведена к задачке на деление 39 ÷ 7. Так как 7 x 5 = 35, что на 4 дальше 39, у нас появилась вторая часть ответа под названием «5» с остатком 4, или, если вы предпочитаете, 25 и 4/7 Вот как выглядит данный процесс:

$$
\begin{array}{r}
25 \\
7\overline{)179} \\
-140 \\
\hline
39 \\
-\;\;35 \\
\hline
4
\end{array}
\longleftarrow \textbf{ОСТАТОК}
$$

ОТВЕТ: 25 С ОСТАТКОМ 4, ИЛИ $25\frac{4}{7}$

Давайте попробуем решить похожую задачку на деление, используя такие же расчёты:

$$675 \div 8$$

Как и прежде, раз уж 675 находится между 8 x 10 = 80 и 8 x 100 = 800, то ваш ответ должен быть меньше 100 и, следовательно, двузначным числом. Чтобы произвести деление, учтите, что 8 x 80 = 640 и 8 x 90 = 720. Отсюда, ваш ответ в районе 80 «с хвостиком». Но каким хвостиком? Чтобы это узнать, вычтите 640 из 675 для получения остатка в размере 35. После произнесения вами «80», наша задача была сведена к 35 ÷ 8. Так как 8 x 4 = 32, итоговый ответ будет 84 с остатком 3 или 84 и 3/8. Проиллюстрируем данный пример следующим образом:

$$
\begin{array}{r}
84 \\
8\overline{)675} \\
-640 \\
\hline
35 \\
-\;\;32 \\
\hline
3
\end{array}
\longleftarrow \textbf{ОСТАТОК}
$$

ОТВЕТ: 84 С ОСТАТКОМ 3, ИЛИ $84\frac{3}{8}$

Как и большинство устных вычислений, деление может рассматриваться как процесс упрощения. Чем больше вы подсчитываете, тем проще проблема становится. То, что начиналось как 675/8 было сведено к меньшей задаче 35 ÷ 8.

Теперь давайте апробируем задачку, решение которой выльется в трёхзначный ответ:

$$947 \div 4$$

На этот раз, ваш ответ будет содержать три цифры, потому что 947 находится между 4 x 100 = 400 и 4 x 1000 = 4000. С тех пор как нам надо отыскать наибольшее кратное 100, которое может быть сжато до размера 947. Так как 4 x 200 = 800, наш ответ определённо будет 200>, так что вперёд, произнесите это! Вычитание 800 из 947 преподносит нам новую задачку на деление 147 ÷ 4. Так как 4 x 30 = 120, мы можем теперь уже произнести «30». После вычитания 120 из 147, мы рассчитываем 27 ÷ 4 для получения остальной части ответа: 6 с остатком 3. В совокупности мы имеем 236 с остатком 3 или $236^{3/4}$.

$$
\begin{array}{r}
236 \\
4\overline{)947} \\
\underline{-800} \\
147 \\
\underline{-120} \\
27 \\
\underline{-\ \ 24} \\
3
\end{array}
\longleftarrow \textbf{ОСТАТОК}
$$

ОТВЕТ: $236\frac{3}{4}$

Процесс деления четырёхзначного числа на одну цифру такой же простой, как и в следующем примере:

$$2196 \div 5$$

Здесь ответ будет исчисляться сотнями, потому что 2196 находится между 5 х 100 = 500 и 5 х 1000 = 5000. После вычитания 5 х 400 = 2000, мы можем произнести «400», и наша задача будет уменьшена до 196 ÷ 5, что может быть решено по мотивам прошлых примеров.

$$\begin{array}{r} 439 \\ 5\overline{)2196} \\ \underline{-2000} \\ 196 \\ \underline{-\ \ 150} \\ 46 \\ \underline{-\ \ \ 45} \\ 1 \end{array}$$

ОТВЕТ: $439\frac{1}{5}$

На самом деле, существует куда более лёгкий способ решения последней задачи. Мы можем упростить её путём удвоения обоих чисел. Так как 2196 х 2 = 4392, то мы имеем 2196 ÷ 5 = 4392 ÷ 10 = 439,2 или 439 и 2/10. Мы рассмотрим больше возможностей «срезать» при делении в следующем разделе.

Упражнение: деление на одну цифру

1. $318 \div 9$	2. $726 \div 5$	3. $428 \div 7$
4. $289 \div 8$	5. $1328 \div 3$	6. $2782 \div 4$

Правило большого пальца

Когда вы делите в уме, а не на бумаге, то вам может показаться сложным запоминание частей ответа, в то время как вы продолжаете вычислять. Один из вариантов, как вы видели ранее, проговаривать ответ вслух по ходу решения. Но для большего драматизма вы можете предпочесть, как и я, удерживать ответ в памяти с помощью пальцев и произносить его целиком в самом конце. В таком случае, вы можете столкнуться с проблемой при запоминании чисел, которые больше пяти, ведь, как и большинство из нас, вы располагаете лишь пятью пальцами на каждой руке. Решением является специальная техника, в основе которой язык жестов. Я называю её «Правило большого пальца». Она наиболее эффективна для запопинания чисел, состоящих из трёх и более цифр. Эта техника полезна не только в данной Главе, но также пригодиться и в последующих, где придётся иметь дело с задачками побольше и с числами подлиннее.

Вы уже знаете, что для представления чисел от 0 до 5, всё, что вам нужно сделать, это поднять эквивалентное количество пальцев на руке. Когда ваш большой палец вовлечён в процесс, лёгким становится представление чисел от 6 до 9. Вот список правил большого пальца:

👍 Чтобы задать 6, разместите большой палец на верхней части вашего мизинца.

👍 Чтобы задать 7, поместите большой палец на верхней части безымянного пальца.

👍 Чтобы задать 8, поместите большой палец на верхней части среднего пальца.

👍 Чтобы задать 9, поместите большой палец на верхней части указательного пальца.

При работе с трёхзначным числом, задайте цифры для сотен на левой руке и цифры для десятков на правой. Когда дело дойдёт до одной цифры, вы достигните конечной точки решения (за исключением возможного остатка). Теперь произнесите число на вашей левой руке, число на вашей правой руке, последнюю цифру, которую только что посчитали, и остаток (что у вас в голове). Вуаля - вы произнесли ответ!

В целях практики попробуйте решить следующую задачку на деление четырёхзначного числа:

$$4579 \div 6$$

$$\begin{array}{r}
763 \\
6\overline{)4579} \\
\underline{-4200} \\
379 \\
\underline{-\ \ 360} \\
19 \\
\underline{-\ \ \ 18} \\
1
\end{array}$$

ОТВЕТ: $763\frac{1}{6}$

Используя правило большого пальца для запоминания ответа, вы зададите 7 на вашей левой руке, путём соединения большого пальца с безымянным, и зададите 6 на вашей правой руке с помощью соединения большого пальца с мизинцем. Как только вы вычислите последнюю цифру (которая равна 3) и остаток (который равен 1), вы можете «зачитать» итоговый ответ с ваших рук слева направо: «семь… шесть…три с остатком один, или одна шестая.»

Некоторые задачи на деление четырёхзначных цифр дают четырёхзначный ответ. В таком случае, раз уж у вас только две руки, вы будете вынуждены вслух произнести цифру для тысячи и использовать правило большого пальца для запоминания остального ответа. Например:

$$8352 \div 3$$

$$\begin{array}{r} 2784 \\ 3\overline{)8352} \\ -6000 \\ \hline 2352 \\ -2100 \\ \hline 252 \\ -\ \ 240 \\ \hline 12 \\ -\ \ \ \ 12 \\ \hline 0 \end{array}$$

ОТВЕТ: **2784**

Для решения этой задачи, вы делите 8 на 3, чтобы получить цифру для тысячи в виде 2; произносите «две тысячи» вслух, затем делите 2352 на 3 привычным способом.

Деление на двузначные числа

К данному разделу мы подходим с предположением, что вы уже освоили искусство деления на одну цифру. Естественно, задачи на деление становятся сложнее с увеличением делителя. К счастью, я припас немного магии в рукаве, чтобы сделать вашу жизнь легче.

Давайте начнем с относительно легкой задачи:

$$597 \div 14$$

Так как 597 находится между 14 x 10 и 14 x 100, ответ (так же называемый как «частное») будет находится между 10 и 100. Чтобы определить ответ, вам в первую очередь нужно задаться вопросом: «Сколько раз по 14 даст в сумме 590?» Потому что 14 x 40 = 560, вы будете знать, что ответ находится в районе 40>, так что вы можете произнести «сорок» вслух.

Далее, вычитаем 560 из 597, что даёт нам 37 и сводит задачу к делению 37 на 14. Так как 14 x 2 = 28, ваш ответ 42. Вычитая 28 из 37, мы получаем остаток 9. Процесс выведения решения задачи может быть показан на рисунке следующим образом:

$$\begin{array}{r} 42 \\ 14\overline{)597} \\ \underline{-560} \\ 37 \\ \underline{-\ \ 28} \\ 9 \end{array}$$

ОТВЕТ: $42\frac{9}{14}$

Следующая задачка немного сложнее, потому что делитель больше:

$$682 \div 23$$

В данном примере ответ будет двузначным числом, так как 682 находится между 23 x 10 = 230 и 23 x 100 = 2300. Чтобы найти цифру для десятка двузначного числа, вам нужно спросить себя: «Сколько раз по 23 даст в сумме 680?» Если вы попробуете 30, то увидите, что это слегка перебор, так как 23 x 30 = 690. Теперь вы в курсе, что ответ находится в районе 20>, и вы можете произнести это. После вычтите 23 x 20 = 460 из 682 для получения 222. Так как 23 x 9 = 207, ответ будет 29 с остатком 222 - 207 = 15.

$$\begin{array}{r} 29 \\ 23\overline{)682} \\ -460 \\ \hline 222 \\ -207 \\ \hline 15 \end{array}$$

ОТВЕТ: $29\frac{15}{23}$

Теперь рассмотрим:

$$491 \div 62$$

Так как 491 меньше, чем 62 x 10 = 620, ваш ответ будет просто цифрой с остатком. Вы можете попробовать угадать 8, но 62 x 8 = 496, а это немножко больше. Так как 62 x 7 = 434, ответ будет 7 с остатком 491 - 434 = 57 или 7 и 57/62.

$$\begin{array}{r} 7 \\ 62\overline{)491} \\ -434 \\ \hline 57 \end{array}$$

ОТВЕТ: $7\frac{57}{62}$

В действительности, есть отличный трюк, который может облегчить решение таких задач. Помните, как вы сначала пытались перемножить 62 x 8, но обнаружили, что это больше, чем нужно? Ну, это было не напрасно. Помимо информации о том, что ответ будет 7, вы также можете сразу определить остаток. Так как 496 на 5 больше, чем 491, остаток будет на 5 меньше, чем 62, делитель. Раз уж 62 - 5 = 57, то ваш ответ 7 и 57/62. Причина, по которой данный трикс работает, в том, что 491 = (62 x 8) - 5 = 62 x (7 + 1) - 5 = (62 x 7 + 62) - 5 = (62 x 7) + (62 - 5) = 62 x 7 + 57.

Теперь попробуйте посчитать 380 ÷ 39, используя «срезку», которую только что выучили. Итак, 39 x 10 = 390, что больше на 10. Следовательно, ответ будет 9 с остатком 39 - 10 = 29.

Следующий вызов для вас - деление четырёхзначного числа на двузначное:

$$3657 \div 54$$

Так как 54 x 100 = 5400, вы знаете, что ваш ответ будет двузначным числом. Чтобы получить первую цифру ответа, вам необходимо выяснить, сколько раз по 54 даст в сумме 3657. Так как 54 x 70 = 3789 (это немножко больше), вы будете знать, что ответ где-то в районе 60>.

Далее, умножьте 54 x 60 = 3240 и вычтите 3657 - 3240 = 417. Как только вы произнесёте 60, ваша задача будет упрощена до 417 ÷ 54. Раз уж 54 x 8 = 432 (что тоже слегка больше), ваша последняя цифра будет 7 с остатком 54 - 15 = 39.

$$
\begin{array}{r}
67 \\
54\overline{)3657} \\
-3240 \\
\hline
417 \\
-\ 378 \\
\hline
39
\end{array}
$$

ОТВЕТ: $67\frac{39}{54}$

Теперь попробуйте свои силы на задачке с трёхзначным частным:

$$9467 \div 13$$

$$\begin{array}{r} 728 \\ 13\overline{)9467} \\ -9100 \\ \hline 367 \\ -\ \ 260 \\ \hline 107 \\ -\ \ 104 \\ \hline 3 \end{array}$$

ОТВЕТ: $728\frac{3}{13}$

Упрощаем задачи на деление

Если к этому моменты вы страдаете мозгового перенапряжения, расслабьтесь. Как и было обещано, я хочу поделиться с вами несколькими приёмами для упрощения определённых задач на деление в уме. Эти приёмы основаны на принципе деления обоих частей задачи на общий множитель. Если оба числа в задаче чётные, вы можете вдвойне упростить проблему путём деления каждого числа на 2 перед тем как начать. Например, 858 ÷ 16 содержит два чётных числа, и деление их на 2 ведёт к значительно более простой задаче 429 ÷ 8:

$$\begin{array}{r} 53 \\ 16\overline{)858} \\ -800 \\ \hline 58 \\ -\ \ 48 \\ \hline 10 \end{array} \qquad \textbf{ПОДЕЛИМ НА 2} \qquad \begin{array}{r} 53 \\ 8\overline{)429} \\ -400 \\ \hline 29 \\ -\ \ 24 \\ \hline 5 \end{array}$$

ОТВЕТ: $53\frac{10}{16}$ **ОТВЕТ:** $53\frac{5}{8}$

Как вы сами видите, остатки 10 и 5 отличаются; но если вы запишите остаток в форме дроби, то получите 10/16, что и есть 5/8. Следовательно, используя данный метод, вы всегда должны выражать ответ в форме дроби.

Мы проделали оба типа вычислений для того, чтобы вы увидели, насколько это легче. Теперь ваша очередь практиковаться:

$$3618 \div 54$$

РАЗДЕЛИМ НА 2

$$\begin{array}{r} 67 \\ 54\overline{)3618} \\ \underline{-3240} \\ 378 \\ \underline{-\ \ 378} \\ 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 67 \\ 27\overline{)1809} \\ \underline{-1620} \\ 189 \\ \underline{-\ \ 189} \\ 0 \end{array}$$

ОТВЕТ: 67

Пример справа намного легче решить в уме. Если вы очень встревожены, то можете разделить обе части исходной задачи на 18 для получения ещё более простой задачи: 201 ÷ 3 = 67.

Выжидайте задачки, которые можно подвергнуть делению на 2 дважды, такие как:

$$1652 \div 36 \underset{\div 2}{=} 826 \div 18 \underset{\div 2}{=} 413 \div 9 = \begin{array}{r} 45 \\ 9\overline{)413} \\ -360 \\ \hline 53 \\ -\ 45 \\ \hline 8 \end{array}$$

ОТВЕТ: $45\frac{8}{9}$

Мне всегда кажется, что проще дважды разделить проблему на 2, чем делить каждое из чисел на 4. А теперь, когда оба числа оканчиваются на 0, вы можете разделить каждое на 10:

$$580 \div 70 \underset{\div 10}{=} 58 \div 7 = \begin{array}{r} 8 \\ 7\overline{)58} \\ -56 \\ \hline 2 \end{array}$$

ОТВЕТ: $8\frac{2}{7}$

Если оба числа заканчиваются на 5, удвойте их, а затем разделите на 10 для упрощения задачи. Например:

$$475 \div 35 \underset{\times 2}{=} 950 \div 70 \underset{\div 10}{=} 95 \div 7 = \begin{array}{r} 13 \\ 7\overline{)95} \\ -70 \\ \hline 25 \\ -21 \\ \hline 4 \end{array}$$

$$\text{ОТВЕТ: } 13\frac{4}{7}$$

Наконец, если делитель оканчивается на 5, а делимое на 0, то умножьте оба на 2, а затем разделите на 10, прямо как мы делали выше:

$$890 \div 45 \underset{\times 2}{=} 1780 \div 90 \underset{\div 10}{=} 178 \div 9 =$$

$$\begin{array}{r} 19 \\ 9\overline{)178} \\ \underline{-90} \\ 88 \\ \underline{-81} \\ 7 \end{array}$$

$$\text{ОТВЕТ: } 19\frac{7}{9}$$

Упражнение: деление на двузначные числа

Здесь вы найдёте разнообразные задачи по делению на двузначные числа, которые проверят ваше ментальное мастерство и умение пользоваться простыми техниками упрощения, которые были объяснен ранее в Главе. Обратитесь к концу книги для получения ответов и объяснений.

1. $738 \div 17$
2. $591 \div 24$
3. $321 \div 79$
4. $4268 \div 28$
5. $7214 \div 11$
6. $3074 \div 18$

Подгоняем мозг под калькулятор: изучение десятичной системы исчисления

Как вы могли догадаться, мне нравится делать ситуацию лучше, когда превращаю обычные дроби в десятичные. В случае с числом из одной цифры, лучший способ - доверить дроби (до 11 в знаменателе) памяти. Это не так сложно, как звучит. Как вы увидите ниже, большинство «одноцифровых» дробей обладают особыми качествами, из-за которых их сложно забыть. Каждый раз, когда вы сможете сократить дробь до уже известной вам, это ускорит процесс.

Шансы, что вы уже знаете десятичный эквивалент для следующих дробей:

$$\frac{1}{2} = .50 \qquad \frac{1}{3} = .333\ldots \qquad \frac{2}{3} = .666\ldots$$

Подобно этому:

$$\frac{1}{4} = .25 \qquad \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = .50 \qquad \frac{3}{4} = .75$$

С пятёрками легче всего запомнить:

$$\frac{1}{5} = .20 \qquad \frac{2}{5} = .40 \qquad \frac{3}{5} = .60 \qquad \frac{4}{5} = .80$$

Шестёрки требуют запоминания только двух новых ответов:

$$\frac{1}{6} = .1666\ldots \qquad \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = .333\ldots \qquad \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = .50$$

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3} = .666\ldots \qquad \frac{5}{6} = .8333\ldots$$

Через мгновенье я вернусь к семёркам. Восьмёрки - сплошные пустяки:

$$\frac{1}{8} = .125 \qquad \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = .25$$

$$\frac{3}{8} = .375 \left(3 \times \frac{1}{8} = 3 \times .125 = .375\right) \qquad \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = .50$$

$$\frac{5}{8} = .625 \left(5 \times \frac{1}{8} = 5 \times .125 = .625\right) \qquad \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = .75$$

$$\frac{7}{8} = .875 \left(7 \times \frac{1}{8} = 7 \times .125 = .875\right)$$

Девятки таят в себе своё собственное волшебство:

$$\frac{1}{9} = .\overline{1} \qquad \frac{2}{9} = .\overline{2} \qquad \frac{3}{9} = .\overline{3} \qquad \frac{4}{9} = .\overline{4}$$

$$\frac{5}{9} = .\overline{5} \qquad \frac{6}{9} = .\overline{6} \qquad \frac{7}{9} = .\overline{7} \qquad \frac{8}{9} = .\overline{8}$$

где чёрточка обозначает то, что дробь в периоде.

Например, $\frac{4}{9} = .\overline{4} = .444. . . .$

Десятки нам уже известны:

$$\frac{1}{10} = .10 \qquad \frac{2}{10} = .20 \qquad \frac{3}{10} = .30$$

$$\frac{4}{10} = .40 \qquad \frac{5}{10} = .50 \qquad \frac{6}{10} = .60$$

$$\frac{7}{10} = .70 \qquad \frac{8}{10} = .80 \qquad \frac{9}{10} = .90$$

Для одиннадцати, если вы помните, что 1/11 = .0909, остальное будет лёгким:

$$\frac{1}{11} = .\overline{09} = .0909\ldots \qquad \frac{2}{11} = .\overline{18}\ (2 \times .0909)$$

$$\frac{3}{11} = .\overline{27}\ (3 \times .0909) \qquad \frac{4}{11} = .\overline{36} \qquad \frac{5}{11} = .\overline{45}$$

$$\frac{6}{11} = .\overline{54} \qquad \frac{7}{11} = .\overline{63} \qquad \frac{8}{11} = .\overline{72}$$

$$\frac{9}{11} = .\overline{81} \qquad \frac{10}{11} = .\overline{90}$$

Семёрки действительно выдающиеся. Как только вы запомните

$$\frac{1}{7} = .\overline{142857},$$

то сможете получить другие ответы без каких-либо вычислений:

$$\frac{1}{7} = .\overline{142857} \qquad \frac{2}{7} = .\overline{285714} \qquad \frac{3}{7} = .\overline{428571}$$

$$\frac{4}{7} = .\overline{571428} \qquad \frac{5}{7} = .\overline{714285} \qquad \frac{6}{7} = .\overline{857142}$$

Обратите внимание, что цепочка цифр повторяется в каждой дроби. Изменяется лишь отправная точка. Вы можете определить её за мгновенье путём умножения 0,14 на числитель. В случае с 2/7, 2 x 0,14 = 0,28, так что используйте последовательность, которая начинается с 2. Так же и 3/7, раз 3 x 0,14 = 0,42, значит нужно использовать последовательность, начинающуюся с 4. Остальное поддаётся такому же правилу.

Вы будете вынуждены считать дроби больше, чем 10/11, когда столкнётесь с другими задачами. Однако, постоянно высматривайте способы упрощения таких задач. Например, вы можете упростить дробь 18/34 путём деления обоих чисел на 2, дабы сократить задачу до 9/17 (её будет легче решить).

Если знаменатель дроби - чётное число, то вы можете упростить дробь, сократив её вдвое, даже если числитель нечётный. Например:

$$\frac{9}{14} = \frac{4.5}{7}$$

Деление числителя и знаменателя надвое сведёт проблему к дроби с семёркой. Хотя ранее показанная последовательность для такого случая и не предоставляет десятичного варианта для 4,5/7, как только вы начнёте считать, заученное число неожиданно всплывёт в памяти:

$$\begin{array}{r} .6\overline{428571} \\ 7\overline{)4.5000000} \\ \underline{-4.2} \\ 3 \end{array}$$

Как вы можете видеть, вам не пришлось решать задачу целиком. Как только вы сократили её, разделив 3 на 7, вы будете в состоянии произвести огромное впечатление на аудитории, отбарабанив этот длинный набор цифр почти мгновенно!

Когда делитель оканчивается на 5, то почти всегда удвоение задачки, а потом её разделение на 10 оправдывает себя. Например,

$$\frac{29}{45} \underset{\times 2}{=} \frac{58}{90} \underset{\div 10}{=} \frac{5.8}{9} = .6\overline{44}$$

Числа, оканчивающиеся на 25 или 75 должны быть умножены на 4, прежде чем вы разделите их на 100.

$$\frac{31}{25} \underset{\times 4}{=} \frac{124}{100} \underset{\div 100}{=} 1.24$$

$$\frac{62}{75} \underset{\times 4}{=} \frac{248}{300} \underset{\div 100}{=} \frac{2.48}{3} = .82\overline{66}$$

Вы даже можете ввести в использование этот трюк в середине решения. Если ваша дробь 3/16, смотрите, что произойдёт:

$$\begin{array}{r} .1 \\ 16\overline{)3.000} \\ -16 \\ \hline 14 \end{array}$$

Как только задача сведётся к 14/16, далее вы можете привести её к виду 7/8, что, как вам известно, равняется 0,875. Отсюда 3/16 = 0,1875.

Упражнение: привидение к десятичной форме

Чтобы решить следующие задачи, не забудьте использовать полученные знания о десятичном виде различных «одноцифровых» дробей. Везде, где это целесообразно, упрощайте дроби, прежде чем преобразовать их в десятичные.

1. $\frac{2}{5}$
2. $\frac{4}{7}$
3. $\frac{3}{8}$
4. $\frac{9}{12}$
5. $\frac{5}{12}$
6. $\frac{6}{11}$
7. $\frac{14}{24}$
8. $\frac{13}{27}$
9. $\frac{18}{48}$
10. $\frac{10}{14}$
11. $\frac{6}{32}$
12. $\frac{19}{45}$

Тестирование на делимость

В последнем разделе мы увидели, как задачки на деление могут быть упрощены, если оба числа поделить на общий множитель. Мы закончим эту главу кратким обсуждением того, как определить, является ли одно число множитилем другого. Возможность определить множитель числа помогает нам упростить задачу на деление и может ускорить процесс решение многих задач на умножение. Это также будет очень полезным инструментом, когда мы доберёмся до продвинутого умножения, где вы частенько будете искать способы разложить на множители двух-, трех-, или даже пятизначный числа посреди решения задачки на умножение. Способность быстро разлагать эти числа будет весьма полезна. И кроме того, я думаю, что некоторые из правил просто сами по себе прекрасны.

Легко проверить, делится ли число на 2. Всё, что вам нужно сделать, это проверить, является ли последняя цифра чётной. Если последняя цифра 2, 4, 6, 8, или 0, то и число целиком делится на 2.

Чтобы протестировать число на способность делится на 4, проверьте, делится ли последняя цифра двузначного числа на 4. Число 57 852 кратно 4, потому что 52 = 13 x 4. Число 69 346 не кратно 4, поскольку 46 не кратно 4. Причина, по которой это работает, состоит в том, что 4 делит равномерно делит 100 и, следовательно, в любое кратное 100 число. Отсюда, так как 4 равномерно делит в 57 800, и 52 делится на 4, мы знаем, что 4 равномерно поделит их сумму, 57 852.

По такому же принципу, так как 1000 делится на 8, для теста на делимость 8, проверьте последние три цифры числа. Число 14 918 делится на 8 как 918. Но раз уж такое действие завещает нам остаток (918 ÷ 8 = 114 6/8), то это число не делится на 8. Вы также могли наблюдать это, если заметили, что 18 (последние две цифры 14 918) не делится на 4, а так как 14 918 не делится на 4, оно не может делиться и на 8.

Когда дело доходит до делимости на 3, предлагаю вам воспользоваться классным правилом, которое легко запомнить: число делится на 3 тогда, и только тогда, когда сумма составляющих его цифр делятся на 3 (независимо от того, сколько цифр в числе). Для проверки того, делится ли 57 852 на 3, просто сложите 5 + 7 + 8 + 5 + 2 = 27. Так как 27 кратно 3, то мы теперь знаем, что 57 852 кратно 3. Такое же удивительное правило справедливо для делимости на 9. Число делится на 9 тогда, и только тогда, когда сумма составляющих его цифр кратна 9. Следовательно, 57 852 кратно 9 , тогда как число 31 416, которое в сумме даёт 15, вовсе нет. Причина, по которой это работает, основана на том, что числа 1, 10, 100, 1000, 10000, и так далее, всегда на единицу больше, чем кратное 9.

Число делится на 6 тогда, и только тогда, когда оно чётное и делится на 3. Так что легко провести тест на делимость на 6.

Установить, делится ли число на 5, ещё проще. Любое число, независимо от своей величины, кратно 5 тогда, и только тогда, когда оно оканчивается на 5 или 0.

Установление делимости на 11 почти такое же простое, как определение делимости на 3 или 9. Число делится на 11 тогда, и только тогда, когда вы придёте либо в 0, либо к кратному 11 в результате попеременного вычитания и сложения составляющих число цифр. Например, 73 958 не делится на 11 , так как 7 - 3 + 9 - 5 + 8 = 16. Однако числа 8492 и 73 194 кратны 11, так как 8 - 4 + 9 - 2 = 11 и 7 - 3 + 1 - 9 + 4 = 0. Причина, по которой это работает, основана, как и правило для 3 и 9, на том, что числа 1, 100, 10 000, 1 000 000 на единицу больше, чем один кратное 11, в то время как числа 10, 1000, 100 000, и так далее на единицу меньше величины, кратной 11.

Тестирование делимости на 7 немного сложнее. Если вы прибавляете (вычитаете) число, которое кратно 7, к (из) числу(а), которое вы тестируете, и полученное число делится на 7, то результат теста положительный. Я всегда выбираю, чтобы прибавляемое или вычитаемое кратное 7, было таким, что в результате сумма или разность заканчивалась бы на 0. Например, для проверки числа 5292, я вычитаю 42 (кратное 7), чтобы получить 5250. Далее, я избавляюсь от 0 на конце (так как деление на десять не влияет проверку делимости на семь), получая в итоге 525. Затем я повторяю процесс, прибавляя 35 (кратное 7), что дает мне 560. Когда я удаляю 0, то остаюсь с числом 56, которое, как мне известно, кратно 7. Таким образом, исходное число 5292 является делимым на 7.

Этот метод работает не только для 7, но и для любого нечетного числа, которое не оканчивается на 5. Например, чтобы проверить, делится ли 8792 на 13, вычитаем 4 x 13 = 52 из 8792 для получения 8740. Опуская 0, имеем следствием 874. Затем прибавляем 2 x 13 = 26, чтобы получить 900. Удаление двух 0 оставляет вас с числом 9, которое, очевидно, не кратно 13. Таким образом, 8792 не кратно 13.

Упражнение: тестируем на делимость

В этом заключительном упражнении будте особенно осторожны, когда проверяете на делимость 7 и 17. Остальное должно быть лёгким для вас.

делимость на 2			
1. **53,428**	2. **293**	3. **7241**	4. **9846**

делимость на 4			
5. **3932**	6. **67,348**	7. **358**	8. **57,929**

делимость на 8			
9. **59,366**	10. **73,488**	11. **248**	12. **6111**

делимость на 3			
13. **83,671**	14. **94,737**	15. **7359**	16. **3,267,486**

делимость на 6			
17. **5334**	18. **67,386**	19. **248**	20. **5991**

делимость на 9			
21. **1234**	22. **8469**	23. **4,425,575**	24. **314,159,265**

делимость на 5			
25. **47,830**	26. **43,762**	27. **56,785**	28. **37,210**

делимость на 11			
29. **53,867**	30. **4969**	31. **3828**	32. **941,369**

делимость на 7			
33. **5784**	34. **7336**	35. **875**	36. **1183**

делимость на 17			
37. **694**	38. **629**	39. **8273**	40. **13,855**

Обыкновенные дроби

Если вы в состоянии управиться с целыми числами, то арифмитические действия с дробями будет почти таким же лёгким. В этом разделе мы сделаем обзор основных методов сложения, вычитания, умножения, деления и упрощения обыкновенных дробей. Те, кто уже знаком с дробями, могут пропустить тот раздел без ущерба для целостности.

Перемножение обыкновенных дробей

Для перемножения двух обыкновенных дробей нуно просто перемножить верхние числа (числители), а затем нижние (знаменатели). Например,

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15} \qquad \frac{1}{2} \times \frac{5}{9} = \frac{5}{18}$$

Что может быть легче! Попробуйте эти упражнения, прежде чем пойдёте дальше.

Упражнение: перемножение обыкновенных дробей

1. $\frac{3}{5} \times \frac{2}{7}$ 2. $\frac{4}{9} \times \frac{11}{7}$ 3. $\frac{6}{7} \times \frac{3}{4}$ 4. $\frac{9}{10} \times \frac{7}{8}$

Деление обыкновенных дробей

Деление дробей такое же лёгкое, как и умножение. Тут только одно дополнительное действие. Сперва переверните левую дробь с ног на голову (это называется «обратная дробь»), а затем умножайте. Например, обратная дробь для 4/5 будет 5/4. Следовательно,

$$\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{10}{12}$$

$$\frac{1}{2} \div \frac{5}{9} = \frac{1}{2} \times \frac{9}{5} = \frac{9}{10}$$

Упражнение: деление обыкновенных дробей

Теперь ваш черёд. Поделите эти дроби.

1. $\frac{2}{5} \div \frac{1}{2}$
2. $\frac{1}{3} \div \frac{6}{5}$
3. $\frac{2}{5} \div \frac{3}{5}$

Упрощение обыкновенных дробей

Дроби можно рассматривать как маленькие задачки на деление. Например, 6/3 то же самое, что и 6/3 = 2. Дробь 1/4 то же самое, что и 1/4 (0,25 в десятичной форме). Теперь нам известно, что когда мы умножаем любое число на 1, то это число остаётся неизменным. Например, 3/5 = 3/5 x 1. Но если мы заменим 1 числом 2/2, то получим 3/5 = 3/5 x 1 = 3/5 x 2/2 = 6/10. Следовательно, 3/5 = 6/10. По такому же принципу, если мы заменим 1 числом 3/3, то получим 3/5 = 3/5 x 3/3 = 9/15. Другими словами, если мы умножаем числитель и знаменатель на одно и то же число, то получаем дробь равную исходной.

Вот другой пример,

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{5} = \frac{10}{15}$$

Верно и то, что если мы разделим числитель и знаменатель на одинаковое число, то получим дробь равную исходной.

Например,

$$\frac{4}{6} = \frac{4}{6} \div \frac{2}{2} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{25}{35} = \frac{25}{35} \div \frac{5}{5} = \frac{5}{7}$$

Это называется упрощение дроби.

Упражнение: упрощение дроби

Можете ли вы найти равную дробь со знаменателем 12 для дробей, представленных ниже?

1. $\frac{1}{3}$ 2. $\frac{5}{6}$ 3. $\frac{3}{4}$ 4. $\frac{5}{2}$

Упростите эти дроби.

5. $\frac{8}{10}$ 6. $\frac{6}{15}$ 7. $\frac{24}{36}$ 8. $\frac{20}{36}$

Сложение дробей

Данное действие можно считать простым, когда знаменатели равны. Если это так, значит мы складываем числители и сохраняем прежний знаменатель.

Например,

$$\frac{3}{5}+\frac{1}{5}=\frac{4}{5} \qquad \frac{4}{7}+\frac{2}{7}=\frac{6}{7}$$

Иногда мы можем упростить наш ответ. Например,

$$\frac{1}{8}+\frac{5}{8}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$$

Упражнение: сложение дробей (равные знаменатели)

1. $\frac{2}{9}+\frac{5}{9}$ 2. $\frac{5}{12}+\frac{4}{12}$ 3. $\frac{5}{18}+\frac{6}{18}$ 4. $\frac{3}{10}+\frac{3}{10}$

Более коварный случай - неравные знаменатели. Когда знаменатели отличаются, мы заменяем исходные дроби дробями с равными знаменателями.

Например, сложите

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{15}$$

Мы заметели, что

$$\frac{1}{3}=\frac{5}{15}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{15}=\frac{5}{15}+\frac{2}{15}=\frac{7}{15}$$

Во время сложения

$$\frac{1}{2} + \frac{7}{8}$$

Мы заметили, что

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2} + \frac{7}{8} = \frac{4}{8} + \frac{7}{8} = \frac{11}{8}$$

Во время сложения

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5}$$

Мы увидели, что

$$\frac{1}{3} = \frac{5}{15} \quad \text{и} \quad \frac{2}{5} = \frac{6}{15}$$

В итоге,

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{5}{15} + \frac{6}{15} = \frac{11}{15}$$

Упражнение: сложение дробей (неравные знаменатели)

1. $\frac{1}{5} + \frac{1}{10}$
2. $\frac{1}{6} + \frac{5}{18}$
3. $\frac{1}{3} + \frac{1}{5}$
4. $\frac{2}{7} + \frac{5}{21}$
5. $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$
6. $\frac{3}{7} + \frac{3}{5}$
7. $\frac{2}{11} + \frac{5}{9}$

Вычитание дробей

Вычитание дробей довольно-таки похоже на их сложение. Мы проиллюстрировали это примерами и обеспечили вас тренировочными упражнениями.

$$\frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{2}{5} \qquad \frac{4}{7} - \frac{2}{7} = \frac{2}{7} \qquad \frac{5}{8} - \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{2}{15} = \frac{5}{15} - \frac{2}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{7}{8} - \frac{1}{2} = \frac{7}{8} - \frac{4}{8} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{7}{8} = \frac{4}{8} - \frac{7}{8} = \frac{-3}{8} \qquad \frac{2}{7} - \frac{1}{4} = \frac{8}{28} - \frac{7}{28} = \frac{1}{28}$$

$$\frac{2}{3} - \frac{5}{8} = \frac{16}{24} - \frac{15}{24} = \frac{1}{24}$$

Упражнение: вычитание дробей

1. $\frac{8}{11} - \frac{3}{11}$

2. $\frac{12}{7} - \frac{8}{7}$

3. $\frac{13}{18} - \frac{5}{18}$

4. $\frac{4}{5} - \frac{1}{15}$

5. $\frac{9}{10} - \frac{3}{5}$

6. $\frac{3}{4} - \frac{2}{3}$

7. $\frac{7}{8} - \frac{1}{16}$

8. $\frac{4}{7} - \frac{2}{5}$

9. $\frac{8}{9} - \frac{1}{2}$

ГЛАВА 5

Достаточно хорош: искусство «приближённой оценки»

До сих пор вы совершенствовали ментальные техники, необходимые для выяснения точных ответов на математические задачи. Однако, частенько бывает так, что всё, что вам нужно, это приблизительная оценка. Скажем, вы получаете расценки различных кредиторов на предмет рефинансирования кредита за ваш дом. Всё, что вам действительно необходимо на данном этапе сбора информации - это приблизительная оценка того, какими будут ваши ежемесячные платежи. Или, скажем, вы оплачиваете счет в ресторане вместе с группой друзей и вы не хотите выяснять долю каждого в нём до последней копейки. Методы приближенной оценки, описанные в данной Главе, сделают обе эти задачи (и многие другие подобные им) гораздо проще. Сложение, вычитание, деление и умножение - всё это поддаётся приближенной оценке. Как обычно, вы будете выполнять ваши вычисления слева направо.

Приближённая оценка в сложении

Приближённая оценка - хороший способ сделать вашу жизнь легче, когда список чисел для запоминания при решении задачи становится слишком длинным. Трюк заключается в том, чтобы округлить ислодное число в большую или меньшую сторону:

$$\begin{array}{r} 8{,}367 \\ +\ 5{,}819 \\ \hline 14{,}186 \end{array} \quad \approx \quad \begin{array}{r} 8{,}000 \\ +\ 6{,}000 \\ \hline 14{,}000 \end{array}$$

Джордж Паркер Биддер: инжинер-калькулятор

У англичан была своя порция молниеносных вычислителей, и устные выступления Джорджа Паркера Биддера (1806-1878, родился в Девоншире), были стол же впечатляющими, как и другие. Как и большинство молниеносных вичислителей, Биддер начал набивать свою руку (и мозги) на арифметике будучи мальчишкой. По ходу обучения счёту, сложению, вычитанию, умножению и делению в процессе игры с мраморными шариками, Биддер отправился на гастроли со своим отцом в возрасте девяти лет.

Почти ни один из вопросов не было слишком трудным для него, чтобы разделаться с ним. «Если Луна находится на расстоянии 123 256 миль от Земли, и звук движется со скоростью четыре мили в минуту, то сколько времени понадобится звуку для путешествия с Земли на Луну ?» Молодой Биддер, с его сморщенным почти на минуту в раздумье лицом, ответил: «Двадцать один день, девять часов, тридцать четыре минуты.» (Теперь мы знаем, что расстояние будет чуть ближе к 240 000 милям, и что звук не может перемещаться через вакуум) В десять лет, Биддер мысленно рассчитал квадратный корень 119 550 669 121 и получил 345 761 всего за тридцать секунд. В 1818 году Биддер и молниеносный вычислитель из Америки Зера Колберн были спарены в ментальной счётной дуэли, в которой Биддер, по-видимому, «численно превзошёл» Колберна.

На волне своей славы, Джордж Биддер поступил в университет Эдинбурга и впоследствии стал одним из наиболее уважаемых инженеров в Англии. В парламентских дебатах по поводу железнодорожных конфликтов, Бидер часто вызывался в качестве свидетеля, что бросало в дрожь оппозицию. Кто-то сказал: «Природа наделила его определенными качествами, которые лишали его соперников справедливого положения» В отличие от Колберна, который ушёл в отставку в качестве молниеносного вычислителя в возрасте двадцати, Биддер сохранял данный статус на протяжении всей жизни. На самом деле, ещё в 1878 году, незадолго до своей смерти, Биддер рассчитал число колебаний света, попадающих в глаз за одну секунду, основываясь на том, что существует 36 918 волн красного света на дюйм, и что свет передвигается со скорость, примерно, 190 000 миль в секунду.

Обратите внимание, мы округлили первое число в меньшую сторону - сторону ближайшей тысячи - и второе число в большую. Так как точный ответ будет 14 186, наша относительная погрешность мала.

Если вы хотите быть более точным, вместо округления в сторону ближайшей тысячи, округляйте в сторону ближайшей сотни:

$$\begin{array}{r} 8{,}367 \\ +\ 5{,}819 \\ \hline 14{,}186 \end{array} \quad \approx \quad \begin{array}{r} 8{,}400 \\ +\ 5{,}800 \\ \hline 14{,}200 \end{array}$$

Ответ отличается лишь на 14 от точного ответа: погрешность меньше чем 0,1%. Вот что я называю хорошей приближённой оценкой!

Попробуйте задачу на сложение пятизначных чисел, округляя до ближайшей сотни:

$$\begin{array}{r} 46{,}187 \\ +\ 19{,}378 \\ \hline 65{,}565 \end{array} \quad \approx \quad \begin{array}{r} 46{,}200 \\ +\ 19{,}400 \\ \hline 65{,}600 \end{array}$$

Благодаря округлению до ближайшей сотни, наш ответ всегда будет отличаться менее чем на 100. Если ответ больше 10 000, ваша приближённая оценка будет в пределах 1% от точного ответа.

Теперь давайте попробуем что-нибудь дикое:

$$\begin{array}{r} 23{,}859{,}379 \\ +\ 7{,}426{,}087 \\ \hline 31{,}285{,}466 \end{array} \quad \approx \quad \begin{array}{r} 24{,}000{,}000 \\ +\ 7{,}000{,}000 \\ \hline 31{,}000{,}000 \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{r} 23.9 \text{ million} \\ +\ 7.4 \text{ million} \\ \hline 31.3 \text{ million} \end{array}$$

Если вы округлите до ближайшего миллиона, то получите ответ в 31 миллион, что примерно на 285 000 меньше. Неплохо, но ваш ответ может быть лучше, если округлять до блишайщих ста тысяч, как показано в правом столбике. Ваша приближённая оценка снова будет в пределах 1% от точного ответа. Если вы сможете находить точные ответы для таких задачек поменьше, то вы сможете давать приблизительно оценить ответ любой задачи.

Приближённая оценка в супермаркете

Давайте попробуем пример из реальной жизни. Вы когда-нибудь приходили в магазин и интересовались, какая будет общая сумма покупки до того, как кассир пробьёт чек? Для оценки общей суммы я использую технику округления цен до ближайщих 50¢. Например, в то время как кассир складывает числа, показанные слева, я мысленно складываю числа, показанные справа:

$ 1.39	$ 1.50
0.87	1.00
2.46	2.50
0.61	0.50
3.29	3.50
2.99	3.00
0.20	0.00
1.17	1.00
0.65	0.50
2.93	3.00
3.19	3.00
$19.75	$19.50

Моя итоговая цена, как правило, находится в пределах одного доллара от точного значения.

Приближённая оценка при вычитании

Способ получения приближённой оценки ответа при вычитании такой же: вы округляете до ближайшей тысячи или сотни, последнее предпочтительнее:

$$\begin{array}{r} 8{,}367 \\ -\ 5{,}819 \\ \hline 2{,}548 \end{array} \approx \begin{array}{r} 8{,}000 \\ -\ 6{,}000 \\ \hline 2{,}000 \end{array} \text{ или } \begin{array}{r} 8{,}400 \\ -\ 5{,}800 \\ \hline 2{,}600 \end{array}$$

Вы можете видеть, как округление до ближайшей тысячи оставляет вас со слегка некорректным ответом. Благодаря округлению второй цифры (сотни, в нашем примере) ваш ответ обычно будет находиться в пределах 3% от точного. В данной задаче, ваш ответ отклоняется лишь на 52, относительная погрешность в 2%. Если округлять третью цифру, то относительная погрешность обычно будет ниже 1%. Например:

$$\begin{array}{r} 439{,}412 \\ -\ \ 24{,}926 \\ \hline 414{,}486 \end{array} \approx \begin{array}{r} 440{,}000 \\ -\ \ 20{,}000 \\ \hline 420{,}000 \end{array} \text{ или } \begin{array}{r} 439{,}000 \\ -\ \ 25{,}000 \\ \hline 414{,}000 \end{array}$$

Путём округления третьей цифры числа вместо второй, вы можете значительно улучшить точность оценки.

Приближённая оценка при делении

Первый, и самый важный, шаг расчёта приближённого ответа для задачи на деление - определить его размер:

$$\begin{array}{r} 9{,}644.5 \\ 6\overline{)57{,}867.0} \end{array} \approx \begin{array}{r} 9 \\ 6\overline{)58{,}000} \\ \underline{54} \\ 4 \end{array}$$

$$\text{ОТВЕТ} \approx 9\frac{2}{3}\ \text{ТЫСЯЧИ} = 9667$$

Следующий шаг: округлить большее из чисел до ближайшей тысячи и поменять 57 867 на 58 000. Деление 58 на 6 даёт вам 9 с остатком. Но самый важный элемент решения данной задачи, это нахождение места размещения для цифры 9.

Например, умножение 6 x 90 даёт 540, тогда как 6 x 900 даёт 5400. Но оба варианта слишком маленькие. Но 6 x 9000 = 54 000, что достаточно близко к ответу. Это говорит о том, что ответ будет 9000 с чем-то. Вы можете прикинуть это «что-то», сперва отняв 58 - 54 = 4. В этом случае, вам нужно снести 0 и разделить 40 на 6, и так далее. Но если вы внимательны, то поймёте, что деление 4 на 6 даёт вам 4/6 = 2/3 и приблизительно равно 0,677. Так как ваш ответ «9000 с чем-то», Вы теперь в состоянии отгадать 9667. В действительности, фактический ответ будет 9645. Чертовски близко!

Деление на данном уровне является простым. Но как на счёт крупных задач на деление? Скажем, мы хотим посчитать, потехи ради, количество денег, которое зарабатывает профессиональный спортсмен в день, если его зарплата за год $5 000 000:

365 дней)$5,000,000

Первым делом, вам нужно определить размер ответа. Этот игрок зарабатывает тысячи каждый день? Нууу, 365 x 1000 = 365 000, что слишком мало.

Он зарабатывает десятки тысяч каждый день? Нууу, 365 x 10 000 = 3 650 000. И это уже больше похоже на правду. Для получения приближённой оценки вашего ответа, разделите первые две цифры (50 на 36) и у вас получиться 1 и 14/36 или 1 и 7/18. Так как 18 - это 4 раза по 70, ваша догадка будет, что спортсмен зарабатывает около $14 000. Точный ответ $13 698,63 в день. Неплохая прикидка. (и неплохая зарплата!)

Вот астрономический расчёт для вас. Сколько секунд необходимо свету, чтобы добраться от Солнца до Земли? Ну, свет перемещается со скоростью 186 282 мили в секунду, а Солнце находится на расстоянии (в среднем) 92 960 130 миль от Земли. Я сомневаюсь, что вы очень-то хотите попробовать решить эту задачку вручную. К счастью, достаточно просто получить приближённую оценку ответа. Сперва упростим задачу:

$$186{,}282\overline{)92{,}960{,}130} \approx 186\overline{)93{,}000}$$

Теперь разделим 930 на 186, что даст нам 5 без остатка. Потом добавим два 0, которые вы убрали у 93 000, и получим 500 секунд. Точный ответ 499,02 секунды, так что это заслуживающая большого уважения приближённая оценка.

Приближённая оценка при умножении

Вы можете использовать почти такие же техники, чтобы приблизительно оценивать свои ответы в задачах на умножение. Например,

$$\begin{array}{r} 88 \\ \times\ 54 \\ \hline 4752 \end{array} \quad \approx \quad \begin{array}{r} 90 \\ \times\ 50 \\ \hline 4500 \end{array}$$

Округление до ближайшего кратного 10 значительно упрощает задачу, но ответ всё ещё отклоняется на 252, или около 5%. Вы можете улучшить ситуацию, если округлите оба числа на одинаковую величину, но в разных направлениях. То есть, если вы округлите 88 до 90, то вам так же следует уменьшить 54 на 2:

$$\begin{array}{r} 88 \\ \times\ 54 \\ \hline 4752 \end{array} \quad \approx \quad \begin{array}{r} 90 \\ \times\ 52 \\ \hline 4680 \end{array}$$

Вместо задачи типа «2-на-2» вы теперь имеете дело с умножением типа «2-на-1», что должно быть достаточно легко для вас. Ваша приближённая оценка отклоняется всего на 1,5%.

Когда ваш приближённый ответ для задачи на умножение получен путём округления большего из чисел в большую сторону и меньшего - в меньшую, то ваш приближённый ответ будет немного занижен. Если вы округлите большее из чисел в меньшую сторону и меньшее - в большую (тогда числа станут достаточно близки), то ваш приближённый ответ будет слегка завышен. Чем больше величина, на которую вы округляете в ту или иную сторону, тем большее отклонение будет иметь ваша приближённая оценка. Например:

$$\begin{array}{r} 73 \\ \times\ 65 \\ \hline 4745 \end{array} \quad \approx \quad \begin{array}{r} 70 \\ \times\ 68 \\ \hline 4760 \end{array}$$

Так как числа стали близки к друг другу после вашего округления, приближённая оценка получилась немного завышенной.

$$\begin{array}{r} 67 \\ \times\ 67 \\ \hline 4489 \end{array} \quad \approx \quad \begin{array}{r} 70 \\ \times\ 64 \\ \hline 4480 \end{array}$$

Так как числа находятся далеко друг от друга, приближённая оценка ответа занижена, однако, не намного. Вы можете заметить, что метод приближённой оценки работает весьма хорошо для примеров на умножение. Также обратите внимание на то, что данная задача есть всего лишь 67^2 и что наша прикидка всего лишь первый шаг из техники возведения в квадрат. Давайте взглянем на ещё один пример:

$$\begin{array}{r} 83 \\ \times\ 52 \\ \hline 4316 \end{array} \approx \begin{array}{r} 85 \\ \times\ 50 \\ \hline 4250 \end{array}$$

Заметим, что аппроксимация является наиболее точной, когда исходные числа находятся близко друг к другу. Попробуйте прикинуть ответ для задачи типа «3-на-2»:

$$\begin{array}{r} 728 \\ \times\ \ 63 \\ \hline 45{,}864 \end{array} \approx \begin{array}{r} 731 \\ \times\ \ 60 \\ \hline 43{,}860 \end{array}$$

Путём округления 63 до 60 и 728 до 731 вы создаёте задачу типа «3-на-1», что помещает вашу приближённую оценку в районе 2004 от точного ответа, ошибка размером 4,3%.

Теперь попробуйте дать приблизительную оценку следующей задачке «3-на-3»:

$$\begin{array}{r} 367 \\ \times\ \ 492 \\ \hline 180{,}564 \end{array} \approx \begin{array}{r} 359 \\ \times\ \ 500 \\ \hline 179{,}500 \end{array}$$

Вы заметите, что, хотя вы и округлили оба числа на 8 в разные стороны, ваш приближённый ответ будет отклонятся более чем на

1000. Это потому, что данная задача на умножение больше, и число, на которое вы округляете, больше. Так что получившаяся в результате оценка будет отклонятся на большую величину. Но относительная погрешность всё ещё будет меньше 1%.

Как далеко можно зайти с данной системой приближённой оценки для задачек на умножение? Как вам угодно. Просто нужно знать названия больших чисел. Тысяча тысяч - миллион, тысяча миллионов - миллиард. Зная эти названия и числа, попробуйте задачку такого размера:

$$\begin{array}{r} 28{,}657{,}493 \\ \times \quad 13{,}864 \\ \hline \end{array} \approx \begin{array}{r} 29 \text{ МИЛЛИОНОВ} \\ \times\ 14 \text{ ТЫСЯЧ} \end{array}$$

Как и ранее, задача состоит в округлении чисел, чтобы они стали простыми числами, такими как 29 000 000 и 14 000. Отбросив на сейчас все 0, получим простую задачу «2-на-2»: 29 x 14 = 406 (29 x 14 = 29 x 7 x 2 = 203 x 2 = 406). Следовательно, ответ будет приблизительно 406 миллиардов, так как тысяча миллионов - это миллиард.

Прикидываем квадратные корни: деление и усреднение

Корень квадратный из n - это число, которое при умножении само на себя, даёт n. Например, квадратный корень 9 будет 3, потому что 3 x 3 = 9. Квадратный корень используется при решении многих научных и инженерных задач и почти всегда рассчитывается на калькуляторе. Следующий метод обеспечивает точную оценку ответа.

При оценке квадратного корня, ваша цель - прийти к числу, которое при умножении само на себя приближается к исходному. Так как квадратный корень большинства чисел не целое число, ваша оценка, вероятно, тоже будет содержать дробную часть.

Давайте начнём с приближённой оценки квадратного корня 19. Ваше первое действие - размышление о том, какое число при умножении само на себя становится как можно ближе к 19. Ну, 4 х 4 = 16 и 5 х 5 = 25. Так как 25 - через чур много, наш ответ должен быть 4, запятая, «что-то». Ваш следующий шаг - деление 19 на 4, дающее 4,75. Теперь, так как 4 х 4 меньше чем 4 х 4,75 = 19 (что в свою очередь меньше 4,75 х 4,75), то мы знаем, что 19 (или 4 х 4,75) находится между 4^2 и $4{,}75^2$. Следовательно, квадратный корень 19 лежит между 4 и 4,75.

Я бы предположил, что квадратный корень 19 будет посередине, на отметке 4,375. В действительности, квадратный корень 19 (округлённый до тысячных) будет 4,359, так что наша приблизительная оценка довольна близка. Мы проиллюстрировали данную процедуру следующим образом:

ДЕЛЕНИЕ:

$$\begin{array}{r} 4.75 \\ 4\overline{)19.0} \\ \underline{16} \\ 30 \\ \underline{28} \\ 20 \\ \underline{20} \\ 0 \end{array}$$

УСРЕДНЕНИЕ:

$$\frac{4 + 4.75}{2} = 4.375$$

На самом деле, мы можем получить данный ответ другим способом, который может показаться вам легче. Мы знаем, что 4 в квадрате 16, что меньше 19 на 3. Чтобы улучшить нашу гипотезу, мы «прибавим погрешность, делённую на наше удвоенное предположение». Здесь мы прибавим 8, делённое на 3, чтобы получить

4 и 3/8 = 4,375. Мы заметили, что этот метод всегда будет порождать ответ, который слегка больше точного.

Теперь вы попробуйте слегка более сложный пример. Какой будет квадратный корень 87?

Деление	Усреднение
$9\overline{)87.0}$ = $9.\overline{66}$	$\frac{9 + 9.66}{2} = 9.\overline{33}$

Сперва прийдите к своему приблизительному итогу, который вы можете весьма быстро получить, если заметите: 9 x 9 = 81 и 10 x 10 = 100; это означает, что ответ будет 9 с «чем-то». Выполнив деление 87 на 9 (до десятых), вы получите 9,66. Чтобы улучшить приближенную оценку, возьмите среднее между 9 и 9,66, которое равно 9,33 - точный квадратный корень 87, округлённый до десятых! Альтернативным образом, наша приближённая оценка будет выглядеть как 9 + (погрешность)/18 = 9 + 6/18 = 9,33 (в периоде).

Использование этой техники делает приближённую оценку квадратного корня довольно-таки лёгкой для двузначных чисел. Но как на счёт трёхзначных? В действительности, они не намного сложнее. Я могу сказать вам прямо с места в карьер, что все трёхзначные и четырёхзначные числа имеют двузначные квадратные корни (до десятых). И процедура вычисления корня такая же, независимо того, насколько большое число. Например, чтобы посчитать квадратный корень 679, сначала нужно прикинуть итог. Потому что 20 - квадратный корень 400, 30 - квадратный корень 900, квадратный корень 679 должен лежать между 20 и 30.

Когда вы разделите 679 на 20, то получите примерно 34. Усреднение 20 и 34 даёт нам приблизительную оценку в размере 27, но есть прикидка получше. Если вы в курсе, что 25 в квадрате 625, тогда ваша погрешность 679 - 625 = 54. Разделив это число на 50, мы получим 54/50 = 108/100 = 1,08. Следовательно, наша улучшенная оценка будет 25 + 1,08 = 26,08. (для ещё более точной прикидки: если вы в курсе, что 26 в квадрате 676, ваша погрешность будет 3, так что прибавьте 3/52 (приближённо равно 0.06), дабы получить 26,06) Точный ответ будет 26,06, округлённый до десятых.

Чтобы приближённо оценить квадратный корень четырёхзначного числа, взгляните на его первые две цифры. Например, чтобы найти квадратный корень 7369, рассмотрим квадратный корень 73. Так как 8 x 8 = 64 и 9 x 9 = 81, то 8 должна быть первой цифрой квадратного корня. Значит, ответ будет 80>. Теперь приступаем к обычному методу решения. Деление 7369 на 80 даёт 92 плюс дробь, так что хорошая приближённая оценка будет 86. Если вы возведёте в квадрат 86, дабы получить 7396, то вы «окажитесь выше» на 27. Так что следует вычесть 27/172 (приближённо равно 0,16) для улучшенной оценки 85,84, которая попадает прямо в точку.

Приближённая оценка квадратного корня шестизначного числа на подобие 593 472 может показаться сродни невозможному для непосвященного. Но вы даже не вспотеете. Так как 700^2 = 490 000, и 800^2 = 640 000, квадратный корень 593 472 должен находиться между 700 и 800. На самом деле, все пяти и шестизначные числа имеют трёхзначные квадратные корни. На практике, ваш нужно только посмотреть на квадратный корень первых двух цифр шестизначного числа (или первые две цифры пятизначного). Как только вы выясните, что квадратный корень 59 лежит между 7 и 8, вы будете знать, что ответ 700>.

А теперь перейдём к привычному способу представления:

Деление

$$\begin{array}{r} 847 \\ 700\overline{)593472} \end{array} \approx \begin{array}{r} 847 \\ 7\overline{)5934} \end{array}$$

Усреднение

$$\frac{700 + 847}{2} = 773.5$$

Точный квадратный корень 593 472 будет 770,37, так что вы довольно близки. Но вы способны быть ещё ближе, как продемонстрирует следующий трикс. Обратите внимание, что первые две цифры, 59, ближе к 64 (8 x 8), чем к 49 (7 x 7). Благодаря этому, вы можете начать прикидывать с цифры 8 и уже продолжить отсюда:

Деление

$$\begin{array}{r} 741 \\ 800\overline{)593472} \end{array} \approx \begin{array}{r} 741 \\ 8\overline{)5934} \end{array}$$

Усреднение

$$\frac{800 + 741}{2} = 770.5$$

Просто ради забавы, давайте сделаем что-нибудь с настоящей громадиной - квадратный корень 28 674 529. Это не так тяжело, как кажется. Ваш первый шаг - округление до наибольшего ближайшего числа. В данном случае, просто найдите квадратный корень 29.

Деление

$$\begin{array}{r} 5.8 \\ 5\overline{)29.0} \\ \underline{25} \\ 40 \end{array}$$

Усреднение

$$\frac{5 + 5.8}{2} = 5.4$$

Все семизначные и восьмизначные числа имеют четырёхзначные квадратные корни. Таким образом, 5,4 становится 5400 - вашей оценкой. Точный ответ на самую малость больше 5354,8. Неплохо!

Это завершает Главу о приближённых оценках в математике. После выполнения упражнений ниже, переходите к следующей главе о математике с ручкой и бумагой, где вы научитесь записывать ответы на задачки, но куда более быстрым способом, нежели раньше.

Математическая Дуэль Эвариста Галуа

Трагическая история французского математика Эвариста Галуа (1811-1832), убитого в возрасте двадцати лет во время дуэли из-за «печально известной кокетки», является легендарной в анналах истории математики. Не по годам развитый блестящий студент, Галуа заложил основу для раздела математики, известного как теория групп. Легенда гласит, что он изложил на бумаге свою теорию в ночь перед дуэлью, предвидя свою кончину и желая оставить своё наследие математическому сообществу. За несколько часов до его смерти, 30 мая 1832 года, Галуа написал Огюсту Шевалье: «Я сделал несколько новых открытий в анализе. Первое касается теории уравнений, остальные - интегральных функций.» После описания этого, он попросил своего друга: «Обратись с публичной просьбой к Якоби или Гауссу, чтобы дать высказали своё мнение не по поводу истинности, но на счёт важность этих теорем. После этого, я надеюсь, кому-нибудь из людей покажется выгодным разобраться в этом беспорядке.»

Романтическая легенда и историческая правда, однако, не всегда совпадают. То, что Галуа написал в ночь перед смертью, представляло собой исправления и редакторские изменения в документах, которые были приняты Академией наук задолго до этого. Более того, первоначальные *документы Галуа были представлены за три года до дуэли, когда ему было всего семнадцать! Именно после этого Галуа оказался втянутым в политические споры, был арестован, провел некоторое время в темнице и, в конечном счете, ввязался в спор за женщину и был убит.*

Осознавая свою преждевременную зрелость, Галуа отмечал: «Я проводил исследования, которые будут причиной приостановки исследований других учёных.» Так и было на протяжении более одного века.

Ещё больше советов по поводу советов

Как уже упоминалось в Главе 0, это легко, выяснить сумму чаевых в большинстве случаев. Например, чтобы вычислить 10% чай, мы всего-навсего умножаем счёт н 0,1 (или делим его на 10). Например, если мы получаем счёт размером $42, тогда 10% чаевые будут равны $4,20. Для определения 20% чаевых, вы просто умножаете счёт на 0,2 или удваеваете величину 10% чаевых. Так, 20% чаевые по счёту $42 будут $8,40.

Для определения 15% чаевых у нас имеется несколько опций. Если вы освоили техники из Главы 2 и комфортно чувствуете себя с умножением на 15 = 5 x 3, то вы просто можете перемножить счёт на 15, затем на 100. Например, при счёте в $42 мы имеем 42 x 15 = 42 x 5 x 3 = 210 x 3 = 630, что легко делится на 100 и даёт нам чаевые в размере $6,30. Другой метод: взять среднее от 10% и 20% чая. Из наших ранних вычислений, это будет

$$\frac{\$4.20 + \$8.40}{2} = \frac{\$12.60}{2} = \$6.30$$

Наверно, самый популярный подход подсчёта 15% чаевых состоит в том, чтобы взять 10% от общего счёта, поделить величину на двое (что будет являться 5%), затем сложить два этих числа вместе. Итак, например, со счётом в $42 вы сложите $4,20 и половину этой величины, $2,10, дабы получить

$$\$4.20 + \$2.10 = \$6.30$$

Давайте применим все три метода, чтобы посчитать 15% от счёта в $67. Прямой метод: 67 x 3 x 5 = 201 x 5 = 1005, что при делении на 100 даёт нам $10,05. Метод усреднения: мы усредняем 10% чая в виде $6,70 и 20% чая в виде $13,40, и получаем

$$\frac{\$6.70 + \$13.40}{2} = \frac{\$20.10}{2} = \$10.05$$

Используя последний метод, мы прибавляем $6,70 к половине данной величины, $3,35, чтобы получить

$$\$6.70 + \$3.35 = \$10.05$$

Наконец, чтобы посчитать 25% чаевые, мы предлагаем два метода. Либо умножьте сумму на 25, а после разделите на 100, либо разделите сумму на 4 (возможно, путём сокращения числа на половину дважды). Например, со счётом в $42 вы можете вычислить 42 x 25 = 42 x 5 x 5 = 210 x 5 = 1050, что при делении на 100 приносит чаевые в размере $10,50. Или вы можете разделить исходную величину прямо на 4, или сократить её на половину дважды: половина $42 будет $21, и половина этого будет $10,50. Со счётом в $67 я бы, вероятно, разделил прямо на 4: так как 67 ÷ 4 = 16 3/4, мы получаем 25% чая в размере $16,75.

Не слишком обременяющие вычисления

В этом разделе я покажу вам свой метод устной прикидки величины налога с продаж. Для некоторых налоговых ставок, таких как 5% или 6%, или 10%, требуются прямые вычисления. Например, чтобы посчитать налог 6%, вы просто умножаете на 6 и делите на 100. Допустим, если цена достигла $58, тогда 58 x 6 = 348, что при делении на 100 даёт точный размер налога с продаж $3,48. (Так что ваша общая сумма будет $61,48)

Но как вы посчитаете налог с продаж размером 6,5% на $58? Я покажу вам несколько способов произвести такие вычисления, и вы выбирете тот, который покажется вам наиболее лёгким. Наверно, самый лёгкий способ прибавить полпроцента к любой сумме в долларах состоит в простом сокращении суммы на половину и последующем переводе её в центы. В примере с $58, так как 29 - половина от 58, просто прибавьте 29 центов к 6% налога (уже посчитанному $3,48) для получения налога с продаж $3,77.

Другой метод расчёта ответа (или хорошей устной прикидки) заключается в том, что мы берём налог 6%, делим его на 12, затем складываем эти два числа. Например, так как 6% от $58 будет $3,48 и 348 поделить на 12 будет почти 30, то мы прибавляем 30 центов для получения оценки в $3,78, что отклоняется лишь на цент. Если вы предпочитаете делить на 10, вместо 12, то вперёд. Вы будуте вычислять 6,6%, вместо 6,5% (так как 6/10 = 0,6), но это всё ещё будет хорошей прикидкой. Здесь вы возьмёте $3,48 и прибавите 34¢ для получения $3,82.

Давайте попробуем другие процентные ставки налога с продаж. Как мы можем посчитать 7,25% от $124? Начните с расчёта 7% от 124. Из методов, показанных в Главе 2, вы знаете, что 124 x 7 = 868. Значит

7% от 124 будет $8,68. Чтобы прибавить четверть процента, вы можете разделить исходную сумму в долларах на 4 (Или сократить её наполовину. Дважды.) и перевести доллары в центы. Здесь 124 ÷ 4 = 31, так что прибавьте 31¢ к $8,68 для получения точного налога с продаж в размере $8,99.

Другой способ прийти к 31¢: возьмите налог с продаж 7% ($8,68) и разделите его на 28. Причина, по которой это работает в том, что 7/28 = 1/4. Для быстрой устной оценки я бы, вероятно, разделил $8,68 на 30, чтобы получить что-то около 29¢. Тогда приблизительный налог с продаж будет $8,97.

Когда вы делите на 30, то в действительности вычисляете налог в размере 7 и 7/30 %, что приблизительно составляет 7,23%, вместо 7,25%.

Как бы вы посчитали налог с продаж в размере 7,75%? Вероятно, для большинства аппроксимаций достаточно лишь сказать, что это немного меньше налога в размере 8%. Здесь вы найдёте несколько предложений для получения лучшей аппроксимаций. Как вы могли видеть в прошлом примере, если вы с лёгкостью можете вычислить корректировку в 0,25%, то можете просто утроить это число и получить корректировку в 0,75%. Например, чтобы вычислить 7,75% от $124, вы сначала рассчитываете 7% для получения $8,68. Если вы вычислите, что 0,25% это 31¢, тогда 0,75% будет 93¢; для получения общего итога сложим $8,68 + 0,93 = $9,61. Для быстрой прикидки вы можете использовать тот факт, что 7/9 = 0,777 приблизительно равно 0,75. Так что вы можете разделить 7% налога на 9, дабы получить корректировку, слегка большую 0,75%. В данном примере, раз уж $8,68 разделить на 9 будет около 96¢, просто сложите $8,68 + 0,96 = $9,64, хоть и с небольшим перевесом.

Мы можем использовать такую процедуру аппроксимации для любых налогов с продаж. Вот общая формула: чтобы оценить налог с продаж размером $A.B%, сначала умножьте сумму на *A*%. Затем разделите эту величину на на число D, где A/D равняется 0,*B.* (таким образом, D равняется A раз на обратную величину B) Сложение этих чисел вместе даст вам общий размер налога. (или его аппроксимацию, если вы округлили D до более лёкго числа неподалёку) Например, с налогом 7,75%, магичиский делитель D будет 7 x 4/3 = 28/3 = 9 1/3, где мы округлим 9 в меньшую сторону. Для налога с продаж в размере 6 3/8%, сначала посчитайте налог в размере 6%, затем разделите полученное число на 16, так как 6/16 = 3/8. (чтобы разделить число на 16, разделите его дважды на 4, или разделите на 8, а затем на 2) Попробуйте придумать метод для расчёта налога с продаж в вашем регионе. Вы поймёте, что данная задача не такая обременяющая, какой кажется!

Немного ИНТЕРЕС-ных вычислений

Наконец, мы вкратце упомянем некоторые практические проблемы, связанные с процентами, с позиции роста ваших инвестиций вложений расти и платы за кредит.

мы начнём со знаменитого Правила 70-ти, которое говорит, сколько приблизительно нужно времени, чтобы ваши деньги удвоились: ЧТОБЫ НАЙТИ ЧИСЛО ЛЕТ, НЕОБХОДИМЫХ ДЯ УДВОЕНИЯ ВАШИХ ДЕНЕГ, РАЗДЕЛИТЕ ЧИСЛО 70 НА ПРОЦЕНТНУЮ СТАВКУ. Предположим, что вы наткнулись на инвестиционную возможность, котороя сулит вам выплату в размере 5% в год. Так как 70 ÷ 5 = 14, значит потребуется около 14 лет, чтобы ваши деньги удвоились. Например, если вы разместили $1000 на сберегательном счёте, который выплачивает такую ставку, тогда после 14 лет на нём будет $\$1000(1,05)^{14} = \$1979,93$. С процентной ставкой 7% правило 70-ти будет означать, что понадобится около 10 лет для удвоения ваших денег. В самом деле, если вы вложите $1000 по такой годовой процентной ставке, то через 10 лет будете иметь $\$1000(1,07)^{10} = \$1967,15$. О процентной ставке в 2% правило 70-ти гласит, что потребуется около 35 лет для удвоения, как показано ниже:

$$\$1000(1.02)^{35} = \$1999.88$$

Схожее правило называется Правило 110-ти, которое определяет, как долго ваши деньги будут утраиваться. Например, при ставке в 5%, раз уж 110 ÷ 5 = 22, потребуется около 22 лет для того, чтобы $1000 перешла в $3000. Это подтверждается калькуляцией $\$1000(1,05)^{22} = \$2925,26$. Правило 70-ти и Правило 110-ти основаны на свойствах числа *e* = 2.71828 . . . и «натуральных логарифмов», но к счастью, нам нет нужды использовать эту высшую математику, чтобы применять данные правила.

Теперь предположите, что вы заняли денег, и вы вынуждены выплатить их назад. Например, вы заняли $360 000 с годовой ставкой процента 6% (это нам следует интерпретировать как аккумулирование ставки в 0,5% каждый месяц) и у вас есть 30 лет, чтобы выплатить этот займ. Сколько, примерно, вам нужно выплачивать каждый месяц? Прежде всего, вам нужно будет платить $360 000 умножить на 0.5% = $1800 каждый месяц только для того, чтобы покрыть проценты. (Хотя на самом деле, ваши долги по процентам будут распределятся во времени равномерно) Так как вы совершите 30 x 12 = 360 месячных выплат, то выплата дополнительной $1000 каждый месяц покроет остаток вашего займа. Итак, верхняя граница ваших ежемесячных выплат будет \$1800 = \$1000 = \$2800. Но к счастью, вам не нужно платить столько сверху. Вот моё правило большого пальца для оценки ваших месячных платежей.

Пусть i будет вашей месячной процентной ставкой. (Это ваша годовая ставка, делённая на 12) Тогда для выплаты займа в размере \$*P за* N месяцев, ваша месячная выплата M будет около

$$M = \frac{P(1+i)^N}{(1+i)^N - 1}$$

В нашем последнем примере, *P =* \$360000 и *i =* 0,005. Так, наша формула показывает, что месячная выплата должна быть

$$M = \frac{\$360{,}000(.005)(1.005)^{360}}{(1.005)^{360} - 1}$$

Обратите внимание, что первые два числа в числителе при умножении дают \$1800. Используя калькулятор (для разнообразия) для подсчёта $(1{,}005)^{360}$ = 6,02, получим ситуацию, в которой вашаа месячная выплата должна быть около \$1800(6,02)/5,02, что примерно равно \$2160 в месяц.

Вот ещё один пример. Предположим, вы желаете взять машину в кредит, и после первоначального взноса вы должны будете выплатить \$18000 за 5 лет с годовой ставкой 4%. Если бы не было процентов, вы вынуждены бы были платить \$18000 ÷ 60 = \$300 в месяц. Так как ставка процента в первый год будет \$18000(0,04) = \$720, то вы знаете, что нужно будет платить не больше \$300 + \$60 = \$360. Так как месячный процент будет *i =* 0,04/12 = 0,00333, то мы используем нашу формулу и получим

$$M = \frac{\$18{,}000(0.0333)(1.00333)^{60}}{(1.00333)^{50} - 1}$$

И так как $(1.00333)^{60} = 1.22$, мы будем иметь размер месячной выплаты около $60(1.22)/(0.22) = $333.

Подведём итоги несколькими упражнениями, которые, как мы надеемся, удержат ваш интерес.

Упражнения на приближённую оценку

Прорешайте следующие упражнения на аппроксимацию; затем сверьте свои ответы и вычисления с нашими в конце книги.

Упражнение: приближённая оценка при сложении

Округлите эти числа в ту или иную сторону и посмотрите, как близко вы подберётесь к точному ответу:

1. $\begin{array}{r} 1479 \\ +\ 1105 \\ \hline \end{array}$

2. $\begin{array}{r} 57{,}293 \\ +\ 37{,}421 \\ \hline \end{array}$

3. $\begin{array}{r} 312{,}025 \\ +\ 79{,}419 \\ \hline \end{array}$

4. $\begin{array}{r} 8{,}971{,}011 \\ +\ 4{,}016{,}367 \\ \hline \end{array}$

Устно прикиньте сумму для следующего столбика цифр, округляя до ближайших 50¢:

$$\begin{array}{r} \$\ 2.67 \\ 1.95 \\ 7.35 \\ 9.21 \\ 0.49 \\ 11.21 \\ 0.12 \\ 6.14 \\ 8.31 \\ \hline \end{array}$$

Упражнение: приближённая оценка при вычитании

Оцените следующие задачи на вычитание, используя округление второй или третьей цифр:

1. $\begin{array}{r} 4{,}926 \\ -\ 1{,}659 \\ \hline \end{array}$ 2. $\begin{array}{r} 67{,}221 \\ -\ 9{,}874 \\ \hline \end{array}$ 3. $\begin{array}{r} 526{,}978 \\ -\ 42{,}009 \\ \hline \end{array}$ 4. $\begin{array}{r} 8{,}349{,}241 \\ -\ 6{,}103{,}839 \\ \hline \end{array}$

Упражнение: приближённая оценка при делении

Скорректируйте числа таким образом, чтобы у вас появилась возможность дать приближённую оценку результатам деления:

1. $7\overline{)4379}$ 2. $5\overline{)23{,}958}$ 3. $13\overline{)549{,}213}$

4. $289\overline{)5{,}102{,}357}$ 5. $203{,}637\overline{)8{,}329{,}483}$

Упражнение: приближённая оценка при умножении

Скорректируйте числа таким образом, чтобы у вас появилась возможность дать приближённую оценку результатам умножения:

1. $\begin{array}{r} 98 \\ \times\ 27 \\ \hline \end{array}$ 2. $\begin{array}{r} 76 \\ \times\ 42 \\ \hline \end{array}$ 3. $\begin{array}{r} 88 \\ \times\ 88 \\ \hline \end{array}$ 4. $\begin{array}{r} 539 \\ \times\ 17 \\ \hline \end{array}$ 5. $\begin{array}{r} 312 \\ \times\ 98 \\ \hline \end{array}$

6. $\begin{array}{r} 639 \\ \times\ 107 \\ \hline \end{array}$ 7. $\begin{array}{r} 428 \\ \times\ 313 \\ \hline \end{array}$ 8. $\begin{array}{r} 51{,}276 \\ \times\ 489 \\ \hline \end{array}$ 9. $\begin{array}{r} 104{,}972 \\ \times\ 11{,}201 \\ \hline \end{array}$ 10. $\begin{array}{r} 5{,}462{,}741 \\ \times\ 203{,}413 \\ \hline \end{array}$

Упражнение: приближённая оценка квадратных корней

Прикиньте квадратные корни следующих чисел, используя метод деления и усреднения:

1. $\sqrt{17}$ 2. $\sqrt{35}$ 3. $\sqrt{163}$ 4. $\sqrt{4279}$ 5. $\sqrt{8039}$

Упражнение: каждодневная математика

- Посчитайте 15% от $88
- Посчитайте 15% от $53
- Посчитайте 25% от $74
- Сколько времени потребуется для удвоения ваших денег при годовой ставке в 10%?
- Сколько времени потребуется для удвоения ваших денег при годовой ставке в 6%?
- Сколько времени потребуется для утроения ваших денег при годовой ставке в 7%?
- Оцените размер месячной выплаты за кредит в $100 000 по процентной ставке 9% в течени 10 лет?
- Оцените размер месячной выплаты за кредит в $30 000 по процентной ставке 5% в течени 4 лет?

ГЛАВА 6

Математика для доски: бумага с ручкой и математика

Во введении к данной книге я обсуждал множество выгод, которые вы получите от умения вычислять в уме. В этой Главе я также представлю некоторые из способов ускорения вычислений на бумаге. С тех пор, как появились калькуляторы, они успели заменить большую часть нужды в ручке с бумагой для выполнения арифметических действий в большинстве практических ситуаций. Я в свою очередь предпочёл сосредоточится на забытом искусстве вычисления квадратных корней и на бросающемся в глаза методе «крест-накрест» для перемножения больших чисел. Раз уж это всё, надо сказать, в основном для разминки мозгов и не для практического применения, я сперва затрону сложение и вычитание и покажу вам всего парочку небольших трюков для ускорения данного процесса и проверки ответов. Эти техники всё же могут быть использованы в повседневной жизни, в чём вы и убедитесь.

Если вы готовы подобраться к более трудным задачкам на умножение, вы можете пропустить эту Главу и сразу перейти к Главе 7, которая является критически важной для освоения навыка работы с большими задачами из Главы 8. Если вам нужен перерыв и вы просто хотите немного повеселиться, тогда я рекомендую вам пройтись по этой Главе: вы получите удовольствие от того, что вновь обратитесь к ручке с бумагой.

Колонки чисел

Сложение длинных колонок чисел - как раз та самая задача, с которой вы можете столкнуться по работе или во время разбора личных финансов. Сложите числа из следующего столбика привычным способом и затем проверьте то, как я это сделал.

$$
\begin{array}{r}
4328 \\
884 \\
620 \\
1477 \\
617 \\
+\ 725 \\
\hline
8651
\end{array}
$$

Когда у меня в распоряжении имеется ручка с бумагой, я складываю числа сверху вниз и справа налево - прямо как нас учили в школе. С практикой, вы сможете решать эти задачи в уме также быстро (или быстрее), как и на калькуляторе. Когда я суммирую цифры, единственный числа, которые я «слышу», - это частичные суммы. Это когда я сперва суммирую первую колонку (крайнюю справа) 8 + 4 + 0 + 7 + 7 + 5, я слышу 8...12 . . . 19 . . . 26 . . . 31. Затем я записываю 1, держу в уме 3 и вывожу результат. Следующая колонка бы звучала как 3 . . . 5 . . . 13 . . . 15 . . . 22 . . . 23 . . . 25. Как только я получаю итоговый ответ, я записываю его, затем проверяю свои вычисления путём сложения чисел снизу вверх и, я надеюсь, получаю такой же ответ.

Например, итоги первой колонки будут подведены снизу вверх в виде 5 + 7 + 7 + 0 + 4 + 8 (что у меня в голове звучит как 5 . . . 12 . . . 19 . . . 23 . . . 31). Затем я мысленно переношу цифру 3 и складываю 3 + 2 + 1 + 7 + 2 + 8 + 2, и так далее. Через сложение чисел в другом порядке вы снижаете вероятность совершить одинаковую ошибку дважды. Конечно, если ответ отличается, тогда хотя бы одно из вычислений дожно быть неправильным.

Модульные суммы

Если я не уверен на счёт своего ответа, то иногда проверяю решение, используя метод, который я называю модульные суммы (потому что он основан на элегантной математике из раздела модульной арифметики). Этот метод также известен под именами «цифровые корни» и «метод сравнений по модулю 9». Я признаю, что он не такой уж практичный, но зато лёгок в использовании.

С методом модульных сумм вы складываете цифры каждого из чисел до тех пор, пока не останетесь с одной единственной цифрой. Например, чтобы вычислить модульную сумму 4328, сложите 4 + 3 + 2 + 8 = 17. Затем сложите цифры числа 17, чтобы получить 1 + 7 = 8. Следовательно, модульная сумма 4328 будет 8. Для предыдущей задачки модульная сумма каждого из чисел вычисляется следующим образом:

4328	→	17			→	8
884	→	20			→	2
620	→	8			→	8
1477	→	19	→	10	→	1
617	→	14			→	5
+ 725	→	14			→	+ 5
8651						29
↓						↓
20						11
↓						↓
2						2

Как проиллюстрировано выше, следующий шаг - сложение всех модульных сумм вместе (8 + 2 + 8 + 1 + 5 + 5). Это даёт 29, что в сумме 11, что в свою очередь в сумме 2. Обратите внимание, что модульная сумма 8651, ваш набор цифр исходного числа, тоже равняется 2. Это не совпадение! Если вы посчитали ответ и модульную сумму правильно, то ваша итоговая модульная сумма должна быть такой же. Если они различаются, то вы определённо допустили где-то ошибку: существует шанс (около 1 к 9), совпадение модульных сумм будет случайным. Если существует ошибка, тогда этот метод позволит обнаружить её 8 раз из 9.

Метод модульных сумм в большинстве случаев известен математикам и бухгалтерам больше как «метод сравнений по модулю 9», потому что модульная сумма числа обыкновенно равняется остатку, полученному в результате деления на 9. В случае, когда ответ выше (8651), модульная сумма была 2. Если вы разделите 8651 на 9, ответ будет 961 с остатком 2. Другими словами, если вы будете отбрасывать 9 из 8651 в общей сумме 961 раз, то будете иметь остаток 2. Существует одно маленькое исключение. Напомним, что сумма цифр любого кратного 9 также является кратной 9. Отсюда, если число является кратным 9, оно будет иметь модульную сумму 9, даже если остаток равен 0.

Вычитание на бумаге

Вы, конечно, не можете вычитать колонки чисел таким же способом, как вы складываете их. Предпочтительнее вычитать их число за числом, что означает: все задачи на вычитание включают лишь два числа. Ещё раз: с карандашом и бумагой в нашем распоряжении легче вычитать справа налево. Чтобы проверить своий ответ, просто прибавьте его ко второму числу. Если всё правильно, тогда вы должны получить верхнее число.

Если хотите, то также можете использовать модульные суммы для проверки вашего ответа. Ключ в том, чтобы вычитать полученные модульные суммы и затем сравнивать полученное число с модульной суммой вашего ответа:

$$\begin{tikzcd}
65{,}717 \arrow[r] & 8 \\
-\underline{38{,}491} \arrow[r] & -\underline{7} \\
27{,}226 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d] \\
19 \arrow[r] & 10
\end{tikzcd}$$

Существует ещё одно ухищрение. Если разница модульных сумм будет отрицательной или равна 0, прибавьте к ней 9. Например:

$$\begin{tikzcd}
42{,}689 & 2 \\
-\underline{18{,}764} & -\underline{8} \\
23{,}925 \arrow[d] & -6+9=3 \\
21 \arrow[d] & \\
3 &
\end{tikzcd}$$

Квадратные корни на бумаге

С появлением карманных калькуляторов, метод ручки с бумагой для расчёта квадратного корня практически превратился в потерянное искусство. Вы уже видели как устно прикидывать квадратные корни.

Сейчас я покажу вам как это делать точно с использованием ручки и бумаги.

Помните, как при приближённой оценке квадратных корней вы рассчитывали квадратный корень девятнадцати? Давайте взглянем на проблему ещё раз, на этот раз используя метод, который даст вам точный квадратный корень.

$$
\begin{array}{rl}
 & 4.\ 3\ 5\ 8 \\
 & \sqrt{19.000000} \\
4^2 = & \underline{16} \\
8\_ \times \_ \leq & 3\,00 \\
8\underline{3} \times \underline{3} = & \underline{2\,49} \\
86\_ \times \_ \leq & 5100 \\
86\underline{5} \times \underline{5} = & \underline{4325} \\
870\_ \times \_ \leq & 77500 \\
870\underline{8} \times \underline{8} = & 69664
\end{array}
$$

Я опишу его в общем случае, который годится для любой ситуации, и проиллюстрирую примером выше.

Шаг 1. Если количество цифр после запятой равно одному, трём, пяти, семи или любому другому нечётному числу, то первая цифра ответа (или частного) будет наибольшим числом, чей квадрат меньше половины первой цифры исходного числа. Если количество цифр после запятой равно двум, четырём, шести или любому другому чётному числу, то первая цифра частного будет наибольшим числом, чей квадрат меньше первых двух цифр делимого. В данном случае, 19 является двузначным числом, так что первая цифра частного будет наибольшим числом, чей корень квадратный меньше 19.

Шаг 2. Вычтите квадрат числа с Шага 1, затем снесите ещё две цифры. Так как $4^2 = 16$, мы отнимаем 19 - 16 = 3. Мы переносим два 0, оставляя 300 в качестве текущего остатка.

Шаг 3. Удвойте существующее частное (игнорируя знаки после запятой) и оставьте пустое место после него. Здесь 4 x 2 = 8. Запишите 8_ x _ слева от текущего остатка (300 в данном случае).

Шаг 4. Следующая цифра частного будет наибольшим числом, которое может заполнить пропуски, so that the resulting multiplication problem is less than or equal to the current remainder. В данном случае, этим числом будет 3, потому что 83 x 3 = 249, тогда как 84 x 4 = 336, что слишком много. Запишите это число над второй цифрой следующих двух чисел; в данной ситуации цифра 3 будет находится над вторым 0. Теперь мы имеем частное в размере 4,3.

Шаг 5. Если вы хотите больше цифр, вычтите произведение из остатка (например, 300 - 249 = 51) и снесите следующие две цифры; в данном случае 51 превратиться в 5100, что станет текущим остатком. Теперь повторите шаги 3 и 4.

Для получения третьей цифры квадратного корня, удвойте частное, снова игнорируя всё после запятой (например, 43 x 2 = 86). Поместите 86_ x _ слева от 5100. Цифра 5 даст нам 865 x 5 = 4325, наибольшее произведение, которое меньше 5100. Пятёрка будет сверху над следующими двумя числами, в данном случае, двумя 0. Теперь мы имеем частное в размере 4,35. Для ещё большего количества цифр после запятой, повторите процедуру, как мы и сделали в примере.

Вот пример нечётного количества цифр поред запятой:

$$
\begin{array}{rcl}
 & & 2\ 8.\ 9\ 7 \\
 & & \sqrt{839.4000} \\
2^2 & = & \underline{4\quad\quad} \\
4\_ \times \_ & \le & 439 \\
4\underline{8} \times \underline{8} & = & \underline{384\quad} \\
56\_ \times \_ & \le & 55\ 40 \\
56\underline{9} \times \underline{9} & = & \underline{51\ 21} \\
578\_ \times \_ & \le & 4\ 1900 \\
578\underline{7} \times \underline{7} & = & 4\ 0509
\end{array}
$$

Далее мы вычислим квадратный корень четырёхзначного числа. В данном случае (как и с двузначными числами) мы учитываем первые две цифры примера для определения первой цифры квадратного корня:

$$
\begin{array}{rcl}
 & & 8\ 2.\ 0\ 6 \\
 & & \sqrt{6735.0000} \\
8^2 & = & \underline{64\quad\quad\quad} \\
16\_ \times \_ & \le & 335 \\
16\underline{2} \times \underline{2} & = & \underline{324\quad\quad} \\
164\_ \times \_ & \le & 11\ 00 \\
1640 \times \underline{0} & = & \underline{\quad\quad 0\quad} \\
1640\_ \times \_ & \le & 11\ 0000 \\
1640\underline{6} \times \underline{6} & = & 9\ 8436
\end{array}
$$

Наконец, если число, для которого вы рассчитывает квадратный корень, имеет правильный (полный) квадрат, вы узнаете об этом сразу же, как получите в итоге нулевой остаток и когда ничего не придётся сносить. Например:

$$\begin{array}{r} 3.\ \ 3 \\ \sqrt{10.89} \\ 3^2 = \underline{9\quad\ \ } \\ 6\_ \times \_ \leq 1\ 89 \\ 6\underline{3} \times \underline{3} = \underline{1\ 89} \\ 0 \end{array}$$

Умножение на бумаге

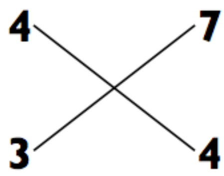
Для умножения с ручкой и бумагой я использую метод «крест-накрест», который позволяет мне записать весь ответ целиком в одну строчку, нигде не записывая промежуточные результаты! Это одна из самых впечатляющих демонстраций математии, когда в вашем распоряжении есть ручка с бумагой. Многие молниеносные вычислители из прошлого заработали себе репутацию этим методом. Они получали два громадных числа и записывали ответ почти мгновенно. Методу «крест-накрест» лучше всего обучаться на примере.

$$\begin{array}{r} 47 \\ \underline{\times\quad 34} \\ 1598 \end{array}$$

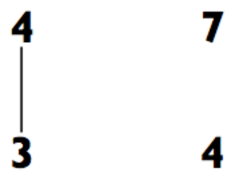
Шаг 1. Сначала умножьте 4 x 7 для получения 28, запишите 8 и мысленно перенесите 2 на следующее вычисление ниже.

$$\begin{array}{cc} 4 & 7 \\ 3 & 4 \end{array}$$

Шаг 2. Следуя схеме, сложите 2 + (4 x 4) + (3 x 7) = 39, запишите 9 и мысленное перенесите 3 на итоговую калькуляцию ниже.



Шаг 3. Закончите сложением 3 + (3 x 4) = 15 и запишите 15 для получения итогового ответа.



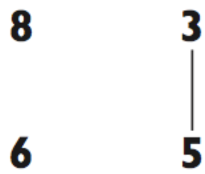
Вы только что записали ответ: 1598.

Давайте решим другую задачу «2-на-2», используя метод «крест-накрест»:

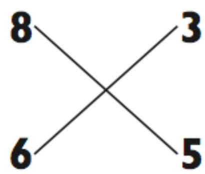
$$\begin{array}{r} 83 \\ \times\ \ 65 \\ \hline 5395 \end{array}$$

Список шагов и схемы выглядят следующим образом:

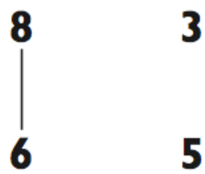
ШАГ 1 $5 \times 3 = 1\underline{5}$



ШАГ 2 $1 + (5 \times 8) + (6 \times 3) = 5\underline{9}$



ШАГ 3 $5 + (6 \times 8) = \underline{53}$



Ответ: 5395

Метод «крест-накрест» становится немного сложнее с задачами типа «3-на-3».

$$\begin{array}{r} 853 \\ \times \quad 762 \\ \hline 649{,}986 \end{array}$$

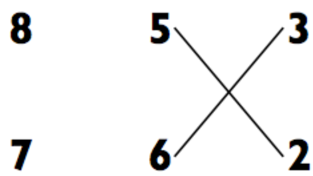
Мы поступили так, как предложено в нашей собственной модели ниже:

ШАГ 1

$$2 \times 3 = \underline{6}$$

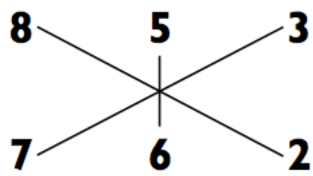
ШАГ 2

$$(2 \times 5) + (6 \times 3) = 2\underline{8}$$



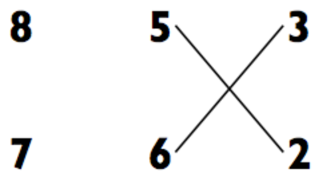
ШАГ 3

$$2 + (2 \times 8) + (7 \times 3) + (6 \times 5) = 6\underline{9}$$



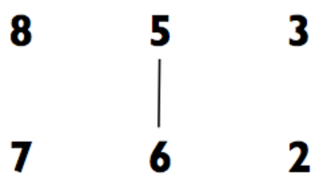
ШАГ 4

$$6 + (6 \times 8) + (7 \times 5) = 8\underline{9}$$



ШАГ 5

$$8 + (8 \times 7) = \underline{64}$$



Ответ: 649 986

Обратите внимание, что количество умножений на каждой стадии составляет 1, 2, 3, 2 и 1 соответственно. Математика, лежащая в основе метода «крест-накрест», не более чем распределительный закон. Например, 853 x 762 = (800 + 50 + 3) x (700 + 60 + 2) = (3 x 2) + [(5 x 2) + (3 x 6)] x 10 + [(8 x 2) + (5 x 6) + (3 x 7)] x 100 + [(8 x 6) + (5 x 7)] x 1000 + (8 x 7) x 10 000, что в точности является вычислением по методу «крест-накрест».

Вы можете проверить свой ответ с помощью модульной суммы путём перемножения модульных сумм двух чисел и расчёту модульной суммы получившегося в итоге числа. Сравните это число с модульной суммой ответа. Если он правильный, то они должны совпадать. Например:

$$
\begin{array}{r}
853 \\
\times \quad 762 \\
\hline
649{,}986 \\
\downarrow \\
42 \\
\downarrow \\
6
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
7 \\
\times\ 6 \\
\hline
42 \\
\downarrow \\
6
\end{array}
$$

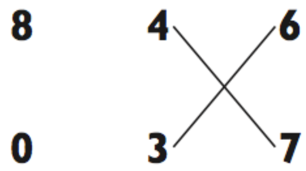
Если модульные суммы не совпадают, то вы допустили ошибку. Данный метод распознаёт ошибку, в среднем, 8 раз из 9.

В случае с примером «3-на-2», процедура такая же, за исключением того, что вы рассматриваете цифры-сотни второго числа как нули:

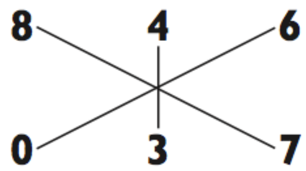
$$
\begin{array}{r}
846 \\
\times \quad 037 \\
\hline
31{,}302
\end{array}
$$

ШАГ 1 $7 \times 6 = 4\underline{2}$

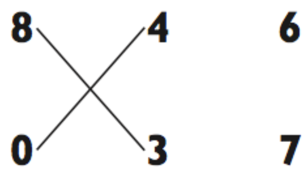
ШАГ 2 $4 + (7 \times 4) + (3 \times 6) = 5\underline{0}$



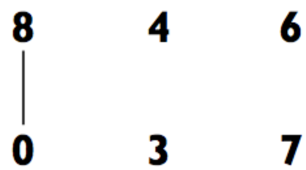
ШАГ 3 $5 + (7 \times 8) + (0 \times 6) + (3 \times 4) = 7\underline{3}$



ШАГ 4 $7 + (3 \times 8) + (0 \times 4) = 3\underline{1}$



ШАГ 5 $3 + (0 \times 8) = \underline{3}$



Ответ: 31 302

Конечно на практике, вы, как правило, просто проигнорируете умножение на нуль. Вы можете использовать метод «крест-накрест» для решения задачек любого размера. Для получения ответа на задачу «5-на-5», которая находится ниже, потребуется девять шагов. Количество умножений на кождом из них будет 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1 (25 в сумме).

$$\begin{array}{r} 42{,}867 \\ \times \quad 52{,}049 \\ \hline 2{,}231{,}184{,}483 \end{array}$$

ШАГ 1

$$9 \times 7 = 6\underline{3}$$

4	**2**	**8**	**6**	**7**
5	**2**	**0**	**4**	**9**

ШАГ 2

$$6 + (9 \times 6) + (4 \times 7) = 8\underline{8}$$

4	**2**	**8**	**6**	**7**
5	**2**	**0**	**4**	**9**

ШАГ 3

$$8 + (9 \times 8) + (0 \times 7) + (4 \times 6) = 10\underline{4}$$

4	**2**	**8**	**6**	**7**
5	**2**	**0**	**4**	**9**

ШАГ 4

$$10 + (9 \times 2) + (2 \times 7) + (4 \times 8) + (0 \times 6) = 7\underline{4}$$

4	**2**	**8**	**6**	**7**
5	**2**	**0**	**4**	**9**

ШАГ 5

$$7 + (9 \times 4) + (5 \times 7) + (4 \times 2) + (2 \times 6) + (0 \times 8) = 9\underline{8}$$

4	**2**	**8**	**6**	**7**
5	**2**	**0**	**4**	**9**

ШАГ 6

$$9 + (4 \times 4) + (5 \times 6) + (0 \times 2) + (2 \times 8) = 7\underline{1}$$

4	**2**	**8**	**6**	**7**
5	**2**	**0**	**4**	**9**

ШАГ 7 $7 + (0 \times 4) + (5 \times 8) + (2 \times 2) = 5\underline{1}$

$$\begin{array}{ccccc} 4 & 2 & 8 & 6 & 7 \\ 5 & 2 & 0 & 4 & 9 \end{array}$$

ШАГ 8 $5 + (2 \times 4) + (5 \times 2) = 2\underline{3}$

$$\begin{array}{ccccc} 4 & 2 & 8 & 6 & 7 \\ 5 & 2 & 0 & 4 & 9 \end{array}$$

ШАГ 9 $(5 \times 4) + 2 = \underline{22}$

$$\begin{array}{ccccc} 4 & 2 & 8 & 6 & 7 \\ 5 & 2 & 0 & 4 & 9 \end{array}$$

Ответ: 2 231 184 483

Вы можете проверить себя, используя метод модульных сумм.

$$\begin{array}{rcr} 42{,}867 & \longrightarrow & 9 \\ \times \quad 52{,}049 & \longrightarrow & \times \ 2 \\ \hline 2{,}231{,}184{,}483 & & 18 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 36 & & 9 \\ \downarrow & & \\ 9 & & \end{array}$$

Метод сравнений по модулю одиннадцати

Чтобы перепроверить свой ответ другим способом, вы можете использовать метод, известный как сравнение по модулю одиннадцати. Это сродни сравнению по модулю девяти, за исключением того, что здесь вы сокращаете число, поочередно вычитая и прибавляя цифры слева направо, игнорируя любые значения после запятой. Если результат отрицательный, просто прибавьте к нему одиннадцать. (это может быть заманчивым, складывать и вычитать слева направо, как вы и делали с модульными суммами, но в данном случае вы должны это делать справа налево для того, чтобы метод сработал)

Например:

$$\begin{array}{rlrlrlr}
234.87 & \longrightarrow & 7-8+4-3+2= & 2 & \longrightarrow & 2 & \\
+\ \underline{58.61} & \longrightarrow & 1-6+8-5= & \underline{-2} & \longrightarrow & \underline{9} & \\
293.48 & \longrightarrow & 8-4+3-9+2= & 0 & \longrightarrow & 11 & \longrightarrow 0
\end{array}$$

Такой же метод работает и для примеров на вычитание:

$$\begin{array}{rlrlrl}
65{,}717 & \longrightarrow & 14 & \longrightarrow & 3 & \\
-\ \underline{38{,}491} & \longrightarrow & \underline{-(-\ 9)} & \longrightarrow & \underline{+\ 9} & \\
27{,}226 & & \longrightarrow & & 12 & \longrightarrow 1 \\
\downarrow & & & & & \\
1 & & & & &
\end{array}$$

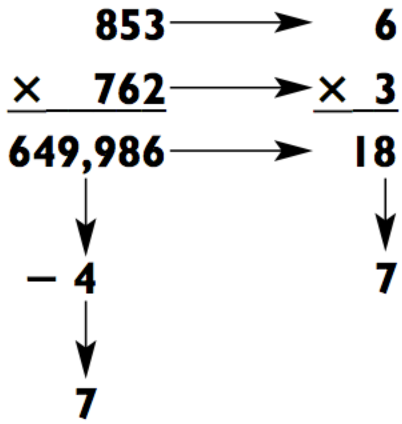
Шакунтала Деви: это не поддаётся расчёту!

В 1976 году «Нью-Йорк Таймс» сообщила, что индийская женщина по имени Шакунтала Деви (р.1939) сложила 25 842 + 111 201 721 + 370 247 830 + 55 511 315, а затем умножила эту сумму на 9878, дабы получить правильный итог в размере 5 559 369 456 432 - всё это менее чем за двадцать секунд. Трудно верится, однако, это необразованная дочь обедневших родителей сделала себе имя в Соединенных Штатах и Европе в качестве молниеносного вычислителя.

К сожалению, большинство по-настоящему удивительных подвигов Деви, которые были выполнены не благодаря очевидным «тонкостям профессии», скудно документированы. Её величайшее заявленное достижение - умножение на время двух тринадцатизначных чисел на бумаге - появилось в Книге Рекордов Гиннесса как пример «Человека-компьютера». Время расчёта, однако, в лучшем случае, вызывает сомнения. Деви, мастер метода «крест-накрест», умножила 7 686 369 774 870 х 2 465 099 745 799 - цифры, как сообщается, случайно сгенерированные в компьютерном отделе Имперского колледжа в Лондоне, 18 июня 1980 года. Её правильный ответ в размере 18 947 668 177 995 426 773 730 был, якобы, воспроизведён за невероятные двадцать секунд. Гиннесс предлагает следующую оговорку: «Некоторые видные математические писатели ставят под сомнение условия, при которых это было несомненно достигнуто и предсказывают, что это было бы невозможно для неё, повторить такой подвиг под чрезвычайно строгим наблюдением.» Так как она должна была решить 169 задач на умножение и 167 на сложение, в общей сложности 336 операций, то она должна была бы производить каждый расчет в пределах десятой секунды, без ошибок, затрачивая время на то, чтобы записать все 26 цифр ответа. Время реакции само по себе возводит этот рекорд в категорию «это не поддаётся расчёту!»

Несмотря на это, Дэви подтвердила свои способности путём совершения быстрых расчётов и даже написала свою собственную книгу на эту тему.

Это работает даже для примеров на умножение:



Если цисла не согласуются, то вы где-то допустили ошибку. Но если они совпадают, существование ощибки всё ещё возможно. В среднем, этот метод распознаёт ошибку 10 раз из 11. Значит ошибка имеет шанс 1 к 11 пробраться сквозь караул одиннадцати, шанс 1 к 9 пробраться сквозь караул девяток и только 1 к 99 быть незамеченной при использовании обоих типов проверки. За большей информацией на счёт этого и других очаровательных матемагических топиков я бы хотел призвать вас обратиться к любой из книг Мартина Гарднера по «занимательной математике».

Теперь вы готовы для завершающей «ручко-бумажной» задачи на умножение в этой книге: 10-на-10! В этом отсутствует какая-либо практическая ценность вообще, кроме того, чтобы покрасоваться! (И лично я думаю, что умножение пятизначных чисел уже итак достаточно впечатляюще, с тех пор как ответы на такие задачи перешли в сферу ответственности большинства калькуляторов) Мы представили его здесь просто для того, чтобы доказать: это можно сделать. Пересечения следуют тем же базовым моделям как и при решении задачи «5-на-5». Будет девятнадцать действий с расчётам и на десятом шаге будет 10 пересечений! Поехали:

$$\begin{array}{r} 2{,}766{,}829{,}451 \\ \times\ 4{,}425{,}575{,}216 \\ \hline \end{array}$$

Вот как мы это сделали:

$6 \times 1 = \underline{6}$

$(6 \times 5) + (1 \times 1) = 3\underline{1}$

$3 + (6 \times 4) + (2 \times 1) + (1 \times 5) = 3\underline{4}$

$3 + (6 \times 9) + (5 \times 1) + (1 \times 4) + (2 \times 5) = 7\underline{6}$

$7 + (6 \times 2) + (7 \times 1) + (1 \times 9) + (5 \times 5) + (2 \times 4) = 6\underline{8}$

$6 + (6 \times 8) + (5 \times 1) + (1 \times 2) + (7 \times 5) + (2 \times 9) +$
$(5 \times 4) = 13\underline{4}$

$13 + (6 \times 6) + (5 \times 1) + (1 \times 8) + (5 \times 5) + (2 \times 2) +$
$(7 \times 4) + (5 \times 9) = 16\underline{4}$

$16 + (6 \times 6) + (2 \times 1) + (1 \times 6) + (5 \times 5) + (2 \times 8) +$
$(5 \times 4) + (5 \times 2) + (7 \times 9) = 19\underline{4}$

$19 + (6 \times 7) + (4 \times 1) + (1 \times 6) + (2 \times 5) + (2 \times 6) +$
$(5 \times 4) + (5 \times 8) + (5 \times 9) + (7 \times 2) = 21\underline{2}$

$21 + (6 \times 2) + (4 \times 1) + (1 \times 7) + (4 \times 5) + (2 \times 6) +$
$(2 \times 4) + (5 \times 6) + (5 \times 9) + (7 \times 8) + (5 \times 2) = 22\underline{5}$

$$22 + (1 \times 2) + (4 \times 5) + (2 \times 7) + (4 \times 4) + (5 \times 6) + (2 \times 9) + (7 \times 6) + (5 \times 2) + (5 \times 8) = 21\underline{4}$$

$$21 + (2 \times 2) + (4 \times 4) + (5 \times 7) + (4 \times 9) + (7 \times 6) + (2 \times 2) + (5 \times 6) + (5 \times 8) = 22\underline{8}$$

$$22 + (5 \times 2) + (4 \times 9) + (7 \times 7) + (4 \times 2) + (5 \times 6) + (2 \times 8) + (5 \times 6) = 20\underline{1}$$

$$20 + (7 \times 2) + (4 \times 2) + (5 \times 7) + (4 \times 8) + (5 \times 6) + (2 \times 6) = 15\underline{1}$$

$$15 + (5 \times 2) + (4 \times 8) + (5 \times 7) + (4 \times 6) + (2 \times 6) = 12\underline{8}$$

$$12 + (5 \times 2) + (4 \times 6) + (2 \times 7) + (4 \times 6) = 8\underline{4}$$

$$8 + (2 \times 2) + (4 \times 6) + (4 \times 7) = 6\underline{4}$$

$$6 + (4 \times 2) + (4 \times 7) = 4\underline{2}$$

$$4 + (4 \times 2) = \underline{12}$$

Если вы сумеете договориться с этой невероятно тяжёлой задачкой с первого раза, то окажетесь на грани перехода из подмастерья в мастера матемагии!

$$\begin{array}{r l}
2{,}766{,}829{,}451 & \longrightarrow 5 \\
\underline{\times\ 4{,}425{,}575{,}216} & \longrightarrow 5 \\
12{,}244{,}811{,}845{,}244{,}486{,}416 & \longrightarrow 7
\end{array}$$

Упражнения по математике с ручкой и бумагой

Упражнение: колонки чисел

Просуммируйте следующие колонки чисел, проверяя свои ответы путём считывания данных снизу вверх, и затем с помощью метода модульных сумм. Если две модульные суммы не совпадают, перепроверьте своё сложение:

1.
$$\begin{array}{r} 672 \\ 1367 \\ 107 \\ 7845 \\ 358 \\ 210 \\ +\ 916 \\ \hline \end{array}$$

Просуммируйте этот столбик долларов и центов:

2.
$$\begin{array}{r} \$\ 21.56 \\ 19.38 \\ 211.02 \\ 9.16 \\ 26.17 \\ +\ \ 1.43 \\ \hline \end{array}$$

Упражнение: вычитание на бумаге

Вычтите следующие числа, используя метод модульных сумм для проверки своего ответа, и затем путём сложения двух нижних чисел для получения верхнего:

1. $\begin{array}{r} 75{,}423 \\ -\ 46{,}298 \\ \hline \end{array}$ 2. $\begin{array}{r} 876{,}452 \\ -\ 593{,}876 \\ \hline \end{array}$ 3. $\begin{array}{r} 3{,}249{,}202 \\ -\ 2{,}903{,}445 \\ \hline \end{array}$ 4. $\begin{array}{r} 45{,}394{,}358 \\ -\ 36{,}472{,}659 \\ \hline \end{array}$

Упражнение: прикидка квадратных корней

Для следующих чисел вычислите точный квадратный корень, используя техники удвоения и деления.

1. $\sqrt{15}$ 2. $\sqrt{502}$ 3. $\sqrt{439.2}$ 4. $\sqrt{361}$

Упражнение: карандашно-бумажное умножение

Чтобы завершить этот сеанс упражнений, примените метод «крест-накрест» для вычисления точного ответа задачи, какой бы у неё ни был размер. Помещайте ответы под чертой, справа налево. Проверьте их с помощью метода модульных сумм.

1. $\begin{array}{r} 54 \\ \times\ 37 \\ \hline \end{array}$ 2. $\begin{array}{r} 273 \\ \times\ 217 \\ \hline \end{array}$ 3. $\begin{array}{r} 725 \\ \times\ 609 \\ \hline \end{array}$

4. $\begin{array}{r} 3{,}309 \\ \times\ 2{,}868 \\ \hline \end{array}$ 5. $\begin{array}{r} 52{,}819 \\ \times\ 47{,}820 \\ \hline \end{array}$ 6. $\begin{array}{r} 3{,}923{,}759 \\ \times\ 2{,}674{,}093 \\ \hline \end{array}$

ГЛАВА 8

Сложное делаем лёгким: продвинутое умножение

К данному моменту в книге (если вы шли к нему Глава за Главой) вы научились выполнять устное сложение, вычитание, умножение и деление так же хорошо, как и овладели искусством приближённой оценки, карандашно-бумажной матемагии и создания фонетического кода чисел для запоминания. Эта глава для серьёзных, несгибаемых матемагов, которые хотят растянуть границы совего разума для устных вычислений. Задачи в этой главе варьируются от возведения в квадрат четырёхзначных чисел до самых больших, которые я решал на публике: умножение двух разных пятизначных чисел.

Для решения этих задачек особенно важно, чтобы вы чувствовали себя комфортно при использовании фонетического кода и достаточно быстро его применяли. И хотя, если вы загляните вперёд в этой Главе, проблемы могут казаться ошеломляющими, позвольте мне вновь заявить о двух основных посылах этой книги: (1) любой навык устных вычислений может быть освоен почти каждым и (2) ключ состоит в упрощении всех проблем и превращении их в более лёгкие задачки, которые могут быть решены быстрее. В данной Главе (или в любой другой) нет ни одной задачи, которая бы вам попалась и была неподвластна усвоению по средствам техник упрощения, которые вы изучили в предыдущих Главах. Так как мы предполагаем, что вы освоили все необходимые техники для это Главы, то мы будет учить вас преимущественно с использованием рисунков, нежели проходить задачки слово за словом. В качестве помощи, однако, мы напоминаем вам, что многие из простых задач, встроенных в эти громадины, являются теми самыми примерами, которые вам уже встречались в предыдущих главах.

Начинаем с возведения в квадрат четырёхзначных чисел. Удачи!

Квадрат четырёхзначных чисел

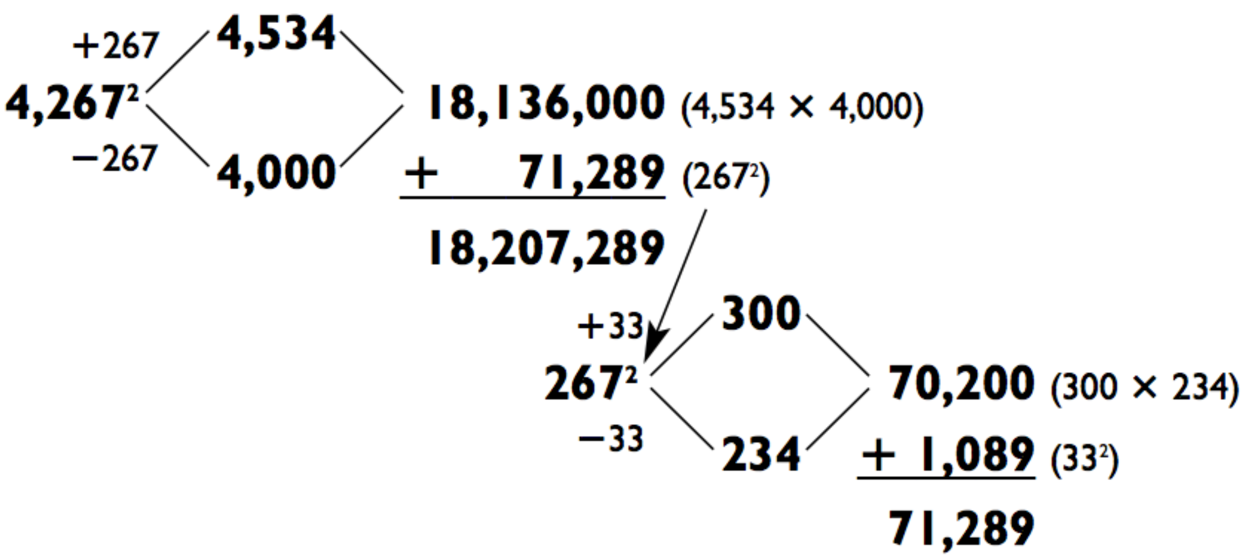
В качестве подготовительного навыка для усвоения процесса возведения в квадрат четырёхзначных чисел вам понадобится способность решать задачи типа «4-на-1». Мы разобьём задачу на два примера типа «2-на-1», как показано в примере ниже:

$$\begin{array}{rr}
 & 4{,}867\ (4{,}800 + 67) \\
 & \times\quad 9 \\
\hline
9 \times 4{,}800 = & 43{,}200 \\
9 \times 67 = & +\quad 603 \\
\hline
 & 43{,}803
\end{array}$$

$$\begin{array}{rr}
 & 2{,}781\ (2{,}700 + 81) \\
 & \times\quad 4 \\
\hline
4 \times 2{,}700 = & 10{,}800 \\
4 \times 81 = & +\quad 324 \\
\hline
 & 11{,}124
\end{array}$$

$$\begin{array}{rr}
 & 6{,}718\ (6{,}700 + 18) \\
 & \times\quad 8 \\
\hline
8 \times 6{,}700 = & 53{,}600 \\
8 \times 18 = & +\quad 144 \\
\hline
 & 53{,}744
\end{array}$$

Как только вы освоите «4-на-1», то будете готовы возводить в квадрат четырёхзначные числа. Давайте возведём в квадрат 4267. Используя такой же метод, как и при возведении двух и трёхзначных чисел в квадрат, мы проделаем это с числом 4267 путём округления его в меньшую сторону на 267 до 4000 и в большую на 267 до 4534. Умножим 4534 х 4000 (это «4-на-1») и затем прибавим квадрат числа, на которое вы изменили исходное (267^2), как показано ниже:



Сейчас уже очевидно, что много всего происходит внутри этого примера. Я осознаю, что одно дела сказать «Просто прибавьте квадрат 267» и совсем другое сделать это и запомнить информацию о том, что же там такое вы должны были прибавить. Прежде всего, как только вы умножите 4534 х 4 для получения 18 136, то вы в действительности сможете произнести первую часть ответа вслух: «Восемнадцать миллионов…» Вы можете так сделать, потому что исходное число всегда округляется до ближайшей тысячи. Таким образом, наибольшее трёхзначное число, которое вам придётся возводить в квадрат на следующем шаге, будет 500. Квадрат 500 это 250 000, так что как только вы увидите, что остаток вашего ответа (в данном случае, 136

000) меньше, чем 750 000, то будете знать, что миллионные цифры не изменятся.

Как тольковы сказали «восемнадцать миллионов…», вам нужно задержаться на 136 000, прежде чем возводить в квадрат 267[3]. Если в какой-то момент посреди вычислений вы забудете какой была изначальная задача, вы можете либо бросить взгляд на исходные числа, либо если они не записаны, попросить аудиторию повторить задание (что создать иллюзию, будто вы приступите к решению заново, в то время как вы уже сделали некоторые из расчётов)!

Сейчас вы заняты возведением в квадрат трёхзначного числа (способом, который уже изучили ранее), чтобы получить 71 289. У меня раньше были проблемы с запоминанием сотен в моём ответе (в данном случае, 2). Я излечил это поднятием пальцев (здесь, двух пальцев). Если вы забыли две последние цифры (89), то можете вернуться к исходному числу (4267), возвести последние две цифры в квадрат (67^2 = 4489), и взять последние две цифры полученного числа.

Для вычисления итогового ответа вам теперь нужно прибавить 71 289 к 136 000 (буквенно-числовому коду) для получения результата 207 289, который вы уже можете проговорить вслух.

[3] Запоминанию чисел могут помочь мнемотехнические приёмы. Вы можете конвертировать 136 с помощь буквенно-числового кода (также помните, что после будет ещё три нуля - так всегда)

Томас Фуллер : учёные мужи и большие дураки

Было бы трудно отнять первое место у физический гандикап в обучении Хелен Келлер, хотя социальный гандикап, возложенный на Томаса Фуллера, родившегося в Африке в 1710 году, довольно близок к этому. Он не был только лишь безграмотным; он был вынужден работать на полях Вирджинии в качестве раба и никогда не получал ни одного дня образования. Будучи «собственностью» миссис Элизабет Кокс, Томас Фуллер сам научился считать до 100, после чего он увеличил свои «числовые силы» путём подсчёта таких предметов под рукой, как зёрна в бушелях пшеницы, семян льна в бушелях и количества волос на коровьем хвосте (2872).

Экстраполируя от простого счёта, Фуллер научился вычислять количество черепицы, которое потребуется для покрытия крыши дома; количество столбов, необходимых для его ограждения и другие релевантные числа касательно строительных материалов. Его поразительные навыки росли, а с ними и его репутации. Во время его старости, два пенсильванца бросили ему вызов на вычисление чисел в уме, таких чисел, которые бы вызвали трудности у лучших из молниеносных калькуляторов. Например, они спросили: «Предположим, фермер имеет шесть свиноматок, и каждая свиноматка родит шесть самок в первый год, и все они будут увеличиваться в той же пропорции вплоть до восьми лет; сколько свиноматок тогда будет иметь фермер?» Задача может быть записана как 78 x 6, то есть 7 x 7 x 7 x 7 x 7 x 7 x 7 x 7 x 6. В течение десяти минут Фуллер дал ответ 34 588 806 - правильный ответ.

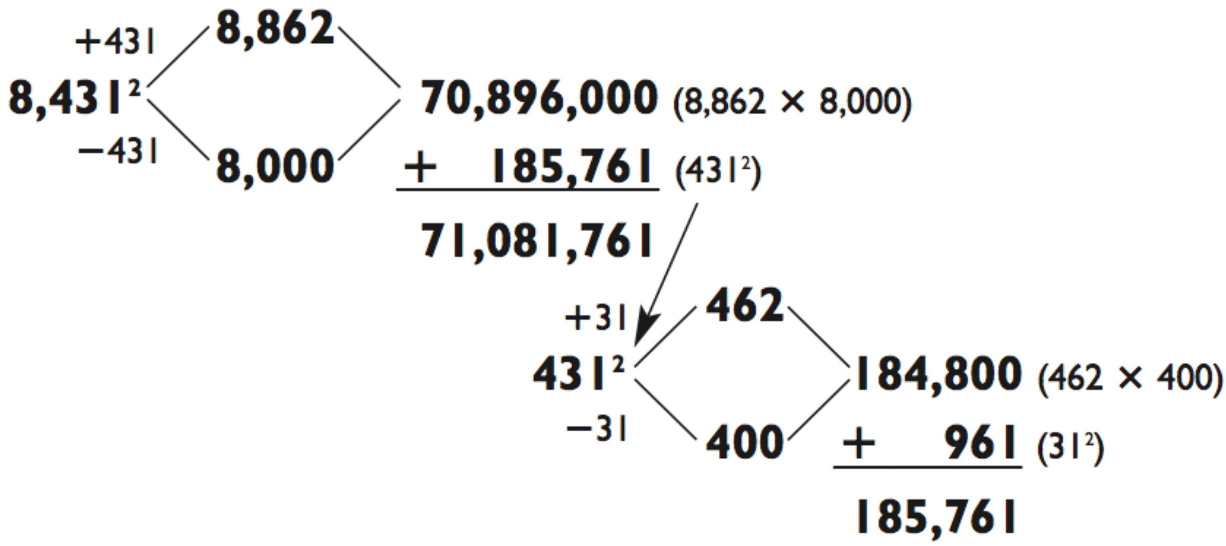
После смерти Фуллера в 1790 году «Columbian Centinel» сообщил, что «он мог назвать число полей[4], ярдов, футов, дюймов и трети дюймов[5] на любом заданном расстоянии, назвать диаметр земной орбиты; и по результатом каждого расчёта он даст истинный ответ за меньшее время, чем девяносто девять человек из ста сделали бы это на бумаге». Когда Фуллера спросили, жалет ли он о том, что так и не получил традиционного образования, он ответил: «Нет, мастер - это лучшее, моё отсутствие образования: на многих учёных мужей найдутся большие дураки»

---

[4] мера площади (= 25,293 м^2)

[5] средний размер ячменного зерна; старинная мера длины

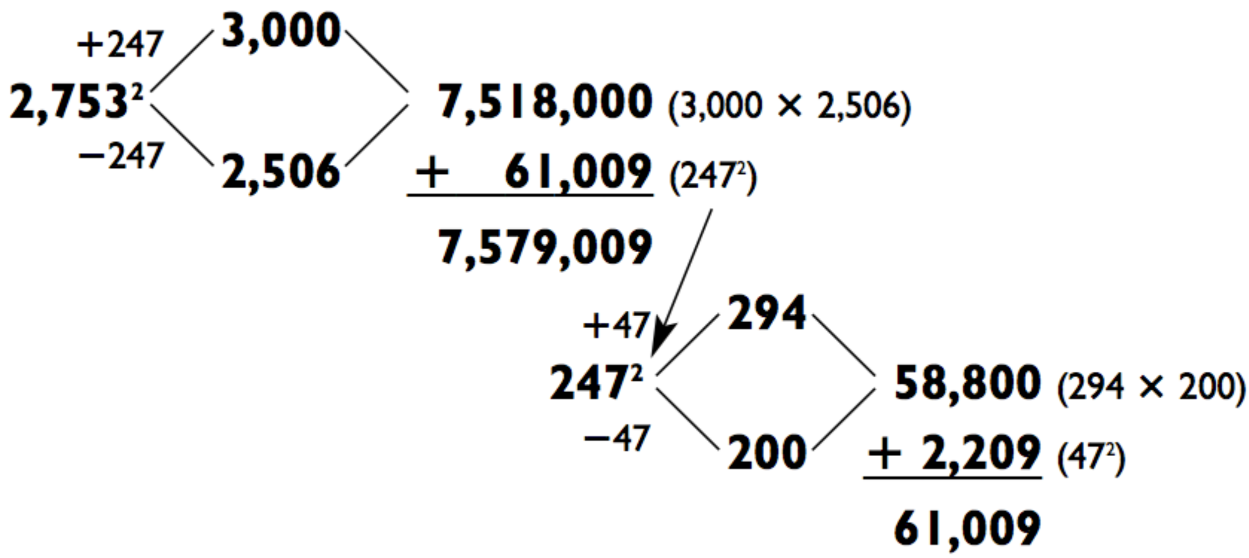
Давайте возведём ещё одно четырёхзначное число в квадрат - 8431^2:



Без повторного описания всех действий в деталях, как мы поступили с последней проблемой, я лишь обращу ваше внимание на запоминающиеся моменты элементы задачи. После выполнения действия 8 x 8862 = 70896, обратите внимание, что 896 больше 750, так что возможно придётся держать числа в уме. В действительности, так как 431^2 больше, чем 400^2 = 160 000, то определённо нужно будет держать числа в уме во время прибавления числа к 896 000. Следовательно, на этой стадии мы можем без опаски сказать вслух: «Семьдесят один миллион…»

Когда вы возвели в квадрат 431, то получили 185 761. Прибавьте 185 к 896, чтобы получить 1081, и произнесите остаток ответа. Но помните, что вы уже предвосхитили перенос чисел, так что просто скажите: «…81 тысяча…761» Работа выполнена!

Мы проиллюстрируем ещё одни тонкий момент на примере 2753^2:



Так как вы округлили до 3000, то будете умножать 3000 на другое число в районе 2000>. Вы можете вычесть 2753 - 247 = 2506, но это слегка тяжело. Чтобы получить последние три цифры, удвойте 753 и получите 1506. Последние три цифры этого числа (506) есть последние три цифры числа 2000: 2506! Это срабатывает, потому что два перемножаемых числа должны быть прибавлены к удвоенному исходному числу.

Затем продолжайте в обычном режиме, умножив 3000 x 2506 = 7 518 000; конвертируйте 518 в буквенно-числовой код и произнесите первую часть ответа вслух: «Семь миллионов…» Вы можете уверенно сказать это, так как 518 ниже 750. Так что здесь не будет переносов.

Далее, вы прибавляете квадрат 247. Не забудьте, что вы можете быстро получить 247 как дополнение 753. Затем переходите к окончательному ответу, как вы сделали в предыдущем примере.

Упражнение: квадрат четырёхзначных чисел

1. 1234^2
2. 8639^2
3. 5312^2
4. 9863^2
5. 3618^2
6. 2971^2

Умножение «3-на-2»

Мы уже видели во время решение задачек типа «2-на-2», что существует несколько разных путей решения одного и того же примера. Многообразие методов увеличивается, когда вы увеличиваете количество цифр в задаче. При умножения «3-на-2» я нахожу выгодным «предварительный осмотр» примера для определения метода расчёта, который подвергнет мозг наименьшей нагрузке.

Факторинговый метод

Самые лёгкие задачи «3-на-2» это те, в которых двузначные числа можно разложить.

Например:

$$\begin{array}{r} 637 \\ \underline{\times\ \ 56} \end{array}\ (8 \times 7)$$

$$637 \times 56 = 637 \times 8 \times 7 = 5{,}096 \times 7 = 35{,}672$$

Они потрясные, потому что вам не нужно ничего прибавлять. Вы просто раскладываете 56 как 8 x 7, затем решаете пример «3-на-1» (637 x 8 = 5096) и, наконец, пример «4-на-1» (5096 x 7 = 35 672).

Больше нет никаких дополнительных действий, и отсутствует нужда в запоминании промежуточных результатов.

Больше половины всех двузначных чисел можно разложить на числа типа 11 и ниже, так что вы будете в состоянии использовать данный метод для многих задач. Вот пример:

$$\begin{array}{r} 853 \\ \underline{\times\ 44} \end{array} (11 \times 4)$$

$$853 \times 11 \times 4 = 9{,}383 \times 4 = 37{,}532$$

Чтобы умножить 853 x 11, представьте 853 в виде 850 + 3 и продолжайте в следующем ключе:

$$\begin{array}{rr} 850 \times 11 = & 9{,}350 \\ 3 \times 11 = & \underline{+\quad 33} \\ & 9{,}383 \end{array}$$

Теперь умножьте 9383 x 4, представив 9383 как 9300 + 83 следующим образом:

$$\begin{array}{rr} 9{,}300 \times 4 = & 37{,}200 \\ 83 \times 4 = & \underline{+\quad 332} \\ & 37{,}532 \end{array}$$

Если двузначное число не раскладывается на меньшие числа, изучите трёхзначное на предмет такой возможности:

$$\begin{array}{r} 144\ (6 \times 6 \times 4) \\ \underline{\times\ 76} \end{array}$$

$$76 \times 144 = 76 \times 6 \times 6 \times 4 = 456 \times 6 \times 4$$
$$= 2{,}736 \times 4 = 10{,}944$$

Обратите внимание на то, что последовательность умножения выстроилась из задач «2-на-1», «3-на-1» и, наконец, «4-на-1». Раз уж это все те задачи, которые сейчас уже можете решать значительной легкостью, такой тип задач «3-на-2» в принципе не должен стать проблемой для вас.

Вот ещё один пример, где двузначное число не подвергается факторизации, но зато трёхзначное число - да:

$$\begin{array}{r} 462\ (11 \times 7 \times 6) \\ \underline{\times\ 53} \end{array}$$

$$53 \times 11 \times 7 \times 6 = 583 \times 7 \times 6 = 4{,}081 \times 6 = 24{,}486$$

Здесь последовательность «2-на-2», «3-на-1» и «4-на-1», хотя, когда трёхзначное число разлагается на 11, вы можете использовать метод умножения на 11 и получить легкий пример «2-на-2» (53 x 11 = 583). В данном случае, признание возможности разделить число на 11 оправдывает себя (как было описано в Главе 4).

Если двузначное число не раскладывается, а трёхзначное раскладывается только в виде «2-на-1», с задачей всё ещё можно легко найти общий язык путём умножения «2-на-2», а затем «4-на-1»:

$$
\begin{array}{r}
423\ (47 \times 9) \\
\underline{\times\ \ 83}
\end{array}
$$

$$83 \times 47 \times 9 = 3{,}901 \times 9 = 35{,}109$$

Здесь вам необходимо будет увидеть то, что 423 делится на 9, ставя перед нами задачу 83 x 47 x 9. Такая задача «2-на-2» не такая уж и простая, но если представить 83 как 80 +3, то вы получите:

$$
\begin{array}{rr}
 & 83\ (80 + 3) \\
 & \underline{\times\quad 47} \\
80 \times 47 = & 3{,}760 \\
3 \times 47 = & \underline{+\ \ 141} \\
 & 3{,}901
\end{array}
$$

Затем решите задачу «4-на-1» в виде 3901 x 9 для получения итогового ответа в размере 35 109.

Метод сложения

Если двух и трёхзначное числа в задаче «3-на-2» не поддаются простому разложению, вы всегда можете прибегнуть к методу сложения:

$$
\begin{array}{rr}
 & 721\ (720 + 1) \\
 & \times \quad 37 \\
\hline
720 \times 37 = & 26{,}640 \\
1 \times 37 = & + \quad 37 \\
\hline
 & 26{,}677
\end{array}
$$

рассматривая 72 как 8 x 9

Данный метод требует от вас сложения результатов задачи «2-на-2» и «2-на-1». Такого рода задачи имеют в себе более сожные элементы (нежели те, которые могут быть факторизованы) так как вы вынуждены решить пример «2-на-1», держа в уме пятизначное число, а затем сложить результаты вместе. В действительности, возможно даже будет проще решить эту задачу путём разложения 721 как 103 х 7 и последующего вычисления 37 х 103 х 7 = 3811 х 7 = 26 677.

Вот другой пример:

$$
\begin{array}{rr}
 & 732\ (730 + 2) \\
 & \times \quad 57 \\
\hline
730 \times 57 = & 41{,}610 \\
2 \times 57 = & + \quad 114 \\
\hline
 & 41{,}724
\end{array}
$$

рассматривая 73 как 70 + 3

Хотя вы обычно будете разбивать трёхзначное число во время использования метода сложения, порой разбитие двузначного числа вместо этого бывает более выгодным, в особенности когда последние цифры двузначного числа это 1 или 2, как в следующем примере:

$$
\begin{array}{rr}
 & 386 \\
 & \underline{\times \quad 51} \ (50 + 1) \\
50 \times 386 = & 19{,}300 \\
1 \times 386 = & \underline{+ \quad 386} \\
 & 19{,}686
\end{array}
$$

Это сокращает «3-на-2» до «3-на-1», делая нашу задачу особенно лёгкой, так как второе действие на умножение включает 1. Заметьте также, что нам была оказана помощь в виде умножения 5 на чётное число, что принесло дополнительный 0 в ответ, так что только одна цифра перекрывается в задаче на сложение.

Другой пример умножения 5 на чётное число проиллюстрирован на следующей задаче:

$$
\begin{array}{rr}
 & 835 \\
 & \underline{\times \quad 62} \ (60 + 2) \\
60 \times 835 = & 50{,}100 \\
2 \times 835 = & \underline{+ \ 1{,}670} \\
 & 51{,}770
\end{array}
$$

Когда вы умножаете 6 (из 60) на 5 и получаете 835, это порождает появление дополнительного 0 в ответе, делая задачу на сложение в особенности лёгкой.

Метод вычитания

Как и с примерами «2-на-2», бывает иногда проще решить задачу «3-на-2» путём вычитания вместо сложения, как в следующих задачках:

$$
\begin{array}{rr l}
 & 629 & (630 - 1) \\
 & \times \quad 38 & \\
\hline
630 \times 38 = & 23{,}940 & (63 = 9 \times 7) \\
-1 \times 38 = & - \quad 38 & \\
\hline
 & 23{,}902 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rr l}
 & 758 & (760 - 2) \\
 & \times \quad 43 & \\
\hline
760 \times 43 = & 32{,}680 & (43 = 40 + 3) \\
-2 \times 43 = & - \quad 86 & \\
\hline
 & 32{,}594 &
\end{array}
$$

В отличии от этого, вы можете сравнить методы вычитания и сложения ниже, применив их к одной и той же задаче:

$$\begin{array}{rrl}
 & 758 & (750 + 8) \\
 & \times \quad 43 & \\
\hline
750 \times 43 = & 32{,}250 & (75 = 5 \times 5 \times 3) \\
8 \times 43 = & + \quad 344 & \\
\hline
 & 32{,}594 &
\end{array}$$

Мое предпочтение при решении данной задачи - использование метода вычитания, потому что я всегда стараюсь оставить себе максимально лёгкую задачу на сложение или вычитание на самый конец. В данном случае, я бы лучше вычел 86, чем прибавил 344, даже при том, что решение задачи типа «2-на-2» (см. выше) методом вычитания слегка тяжелее, чем методом сложения.

Метод вычитания также может быть использован с трёхзначными числами, которые меньше кратного 100 или близки к кратному 1000, как в следующих двух примерах:

$$\begin{array}{rrl}
 & 293 & (300 - 7) \\
 & \times \quad 87 & \\
\hline
300 \times 87 = & 26{,}100 & \\
-7 \times 87 = & - \quad 609 & \\
\hline
 & 25{,}491 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrl}
 & 988 & (1000 - 12) \\
 & \times \quad 68 & \\
\hline
1{,}000 \times 68 = & 68{,}000 & \\
-12 \times 68 = & - \quad 816 & (12 = 6 \times 2) \\
\hline
 & 67{,}184 &
\end{array}$$

Последние три цифры ответа были получены путём использования дополнений 609 - 100 = 509 и 816, соответственно.

Наконец, на следующей иллюстрации мы поделили двузначное число с помощью метода вычитания. Обратите внимание, как мы отняли 736 путём вычитания 1000 и обратного прибавления дополнения:

$$
\begin{array}{rr}
 & 736 \\
 & \underline{\times \quad 59}\ (60-1) \\
60 \times 736 = & 44{,}160 \\
-1 \times 736 = & \underline{- \quad 736} \\
 & 43{,}424
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
44{,}160 \\
\underline{-\ 1{,}000} \\
43{,}160 \\
\underline{+ \quad 264} \\
43{,}424
\end{array}
$$

Упражнение: «3-на-2» с использованием факторинга, сложения и вычитания

Решите представленные ниже задачи типа «3-на-2» с использованием методов факторинга, сложения или вычитания. Факторинг, когда он возможен, обычно легче. Решения показаны в конце книги.

1. 858×15
2. 796×19
3. 148×62
4. 773×42
5. 906×46
6. 952×26
7. 411×93
8. 967×51
9. 484×75
10. 126×87
11. 157×33
12. 616×37
13. 841×72
14. 361×41
15. 218×68
16. 538×53
17. 817×61
18. 668×63
19. 499×25
20. 144×56
21. 281×44
22. 988×22
23. 383×49

Следующие примеры типа «3-на-2» появятся в разделах по возведению пятизначных чисел в квадрат и умножению типа «5-на-5».

24. $\begin{array}{r} 589 \\ \times\ 87 \\ \hline \end{array}$ 25. $\begin{array}{r} 286 \\ \times\ 64 \\ \hline \end{array}$ 26. $\begin{array}{r} 853 \\ \times\ 32 \\ \hline \end{array}$ 27. $\begin{array}{r} 878 \\ \times\ 24 \\ \hline \end{array}$

28. $\begin{array}{r} 423 \\ \times\ 45 \\ \hline \end{array}$ 29. $\begin{array}{r} 154 \\ \times\ 19 \\ \hline \end{array}$ 30. $\begin{array}{r} 834 \\ \times\ 34 \\ \hline \end{array}$ 31. $\begin{array}{r} 545 \\ \times\ 27 \\ \hline \end{array}$

32. $\begin{array}{r} 653 \\ \times\ 69 \\ \hline \end{array}$ 33. $\begin{array}{r} 216 \\ \times\ 78 \\ \hline \end{array}$ 34. $\begin{array}{r} 822 \\ \times\ 95 \\ \hline \end{array}$

Возведение пятизначных чисел в квадрат

Освоение умножение задач типа «3-на-2» требует куда больше практики, но как только вы управитесь с ним, то сможете плавно перейти прямо к задачам по возведению пятизначных чисел в квадрат, потому что они упрощаются до умножения типа «3-на-2» плюс возведение двух и трёхзначных чисел в квадрат. Смотрите:

Чтобы возвести в квадрат следующее число:

$$46{,}792^2$$

Подойдите к этому следующим образом:

$$\begin{array}{r} 46{,}000 + 792 \\ \times\ 46{,}000 + 792 \\ \hline \end{array}$$

Используя распределительный закон, мы можем разбить пример так:

$$\overset{1.}{46{,}000 \times 46{,}000} + \overset{2.}{2(46{,}000)(792)} + \overset{3.}{792 \times 792}$$

За это можно взяться более простым способом:

$$46^2 \times 1 \text{ million} + (46)(792)(2000) + 792^2$$

Но я не решаю их в таком порядке. На самом деле, я начинаю с середины, потому что задача типа «3-на-2» тяжелее, чем возведение в квадрат двух- и трёхзначных чисел. Так что в соответствии с принципом «убирай сложное со своего пути в первую очередь», я вычисляю 792 x 46 x 2 и прикрепляю три нуля на концовку, а именно:

$$\begin{array}{rr} & 792 \; (800 - 8) \\ & \times \quad 46 \\ \hline 800 \times 46 = & 36{,}800 \\ -8 \times 46 = & - \quad 368 \\ \hline & 36{,}432 \times 2{,}000 = 72{,}864{,}000 \end{array}$$

Используя метод вычитания, как показано выше, посчитайте 792 x 46 = 36432, затем удвойте это число для получения 72 864. Применение фонетического по отношению к числу 864 позволит вам хранить в памяти это число как «72 буквенно-числовой код».

Следующий шаг: посчитать 46^2 x 1 миллион, что будет 2 116 000 000.

На данной стадии вы можете произнести: «Два миллиарда…»

Активизировав в памяти «72 буквенно-числовой код», вы прибавляете 116 миллионов, чтобы получить 118 миллионов. Прежде чем сказать это вслух, вам нужно заранее проверить и посмотреть, нужно ли что-то держать в уме, когда вы прибавляете буквенно-числовой код, то есть 864, к 792^2. Здесь вы на самом деле не вычисляете 792^2; скорее вы определяете тот факт, что результат вычислений будет достаточно большой, для того, чтобы перекрыть 864 000. (вы можете приблизительно оценить это, если заметите, что 800^2 это 640 000, что с лёгкостью перекроет 864 000. Таким образом, вы поднимите на ступеньку выше 188 и скажите: «. . . 189 миллионов. . . .»)

Всё ещё держа в памяти буквенно-числовой код, посчитайте квадрат 792, используя метод для возведения трёхзначных числел в квадрат (округление в большую и меньшую стороны на 8, и так далее), чтобы получить 627 264. Наконец, прибавьте 627 к буквенно-числовому коду, то есть 864, дабы получить 1491. Но так как вы уже сделали перенос, отбросьте 1 и произнесите: «…491 тысяча 264»

Иногда я забываю последние три цифры ответа, потому что мой мозг был так сильно поглощён большими вычислениями. Так что перед тем, как провернуть итоговое сложение, я сохраняю цифру 2 (от 264) на своих пальцах и стараюсь запомнить 64, что я обычно в состоянии сделать, потому что мы имеем склонность к запоминанию того, что не так давно слышали. Если затея проваливается, то я могу прийти к последним двум цифрам путём возведения в квадрат последних двух цифр исходного числа, 92^2, или 8464, последние две цифры которого и есть те самые последние две цифры: 64. (В качестве альтернативы, вы можете конвертировать 264 в фонетический код)

Я знаю, что это довольно-таки труднопроизносимо. Для повторного выполнения всей задачи целиком достаточно лишь одной иллюстрации. Вот как я посчитал 46 792^2:

$$
\begin{array}{rr}
 & 792\ (800 - 8) \\
 & \times \quad 46 \\
\hline
800 \times 46 = & 36{,}800 \\
-8 \times 46 = & - \quad 368 \\
\hline
 & 36{,}432 \times 2{,}000 = 72{,}864{,}000
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rr}
 & 72{,}864{,}000 \\
46{,}000^2 = & +\ 2{,}116{,}000{,}000 \\
\hline
 & 2{,}188{,}864{,}000 \\
792^2 = & + \qquad 627{,}264 \\
\hline
 & 2{,}189{,}491{,}264
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccr}
 & +8 \quad 800 & \\
792^2 & & 627{,}200 \\
 & -8 \quad 784 & + \qquad 64\ (8^2) \\
\hline
 & & 627{,}264
\end{array}
$$

Давайте взглянем на другой пример с возведением пятизначного числа в квадрат:

$$83{,}522^2$$

Как и прежде, мы вычисляем ответ в таком порядке:

$83 \times 522 \times 2{,}000,\ 83^2 \times 1$ миллион, затем 522^2

В первой задаче обратите внимание, что 522 является кратным 9. Фактически, 522 = 58 x 9. Рассматривая 83 как 80 + 3, мы получим:

$$\begin{array}{r} 522\ (58 \times 9) \\ \times\ 83 \\ \hline \end{array}$$

$$83 \times 58 \times 9 = 4{,}814 \times 9 = 43{,}326$$

Удвоение 43 326 даёт нам в результате 86 852, что может быть сохранено как «86 буквенно-числовой код». Так как 83^2 = 6889, мы можем произнести: «Шесть миллиардов…»

Сложение 889 + 86 даёт нам 975. Прежде чем произнести «975 миллионов», мы проверяем, не приведёт ли наш буквенно-числовой код (он же 652 000) к переносу чисел, после возведения в квадрат 522. Приблизительно оценив 522^2 как 270 000 (500 x 540), вы увидите, что перекрытия не будет. значит, вы можете спокойно сказать: «…975 миллионов…»

Наконец, возведение в квадрат 522 обычным способом приведёт нас к 272 484, а прибавление данного числа к буквенно-числовому коду (652 000) - к остальной части ответа: «…924 484»

В виде рисунка данная задача выглядит следующим образом:

$$83{,}522^2$$

$$\begin{array}{r} 522 \\ \times\ 83 \\ \hline \end{array}$$

$$83 \times 58 \times 9 = 4{,}814 \times 9 = 43{,}326$$

$$
\begin{array}{rr}
43{,}326 \times 2{,}000 = & 86{,}652{,}000 \\
83{,}000^2 = & \underline{+\ 6{,}889{,}000{,}000} \\
 & 6{,}975{,}652{,}000 \\
522^2 = & \underline{+\qquad\quad 272{,}484} \\
 & 6{,}975{,}924{,}484
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
 & 544 & \\
522^2 \begin{array}{c} +22 \\ -22 \end{array} & & \begin{array}{r} 272{,}000 \\ \underline{+\qquad 484} \ (22^2) \\ 272{,}484 \end{array} \\
 & 500 &
\end{array}
$$

Упражнение: возведение в квадрат пятизначных чисел

1. $45{,}795^2$
2. $21{,}231^2$
3. $58{,}324^2$
4. $62{,}457^2$
5. $89{,}854^2$
6. $76{,}934^2$

Умножение «3-на-3»

На пути к продвижению к нашему грандиозному финалу в виде умножения «5-на-5», задачки типа «3-на-3» наше последний барьер. Как и в случае с «3-на-2», существует многообразие методов, которые могут быть использованы для упрощения процесса в целом.

Метод факторинга

Мы начнём с метода факторинга. К несчастью, большинство трёхзначных чисел не раскладываются на единичные цифры, но если всё-таки раскладываются, процесс вычисления будет не таким уж и плохим.

$$
\begin{array}{r}
829 \\
\underline{\times\ 288} \ (9 \times 8 \times 4)
\end{array}
$$

$$829 \times 9 \times 8 \times 4 = 7{,}461 \times 8 \times 4 = 59{,}688 \times 4 = 238{,}752$$

Обратите внимание на последовательность действий. Вы упрощаете задачу «3-на-3» (829 x 288) до «3-на-1-на-1-на-1». путём разложения 288 на 9 x 8 x 4. Далее это превращается в «4-на-1-на-1» (7461 x 8 x 4) и, наконец, в «5-на-1» для получения итогового ответа 238 752. Прелесть данного процесса заключается в отсутствии каких-либо действий на сложение и в том, что ничего не нужно хранить в памяти. Когда вы получили пример «5-на-1», то встали в одном шаге от выполнения задания.

Задача типа «5-на-1» может быть решена в два действия, если принять 59 688 как 59 000 + 688, а затем сложить результаты задач «2-на-1» (59 000 x 4) и «3-на-1» (688 x 4), как показано ниже:

$$
\begin{array}{rr}
 & 59{,}688\ (59{,}000 + 688) \\
 & \underline{\times \qquad 4} \\
59{,}000 \times 4 = & 236{,}000 \\
688 \times 4 = & \underline{+ \quad 2{,}752} \\
 & 238{,}752
\end{array}
$$

Если оба трёхзначных числа могут быть разложены как «2-на-1», тогда задача «3-на-3» может быть упрощена до «2-на-2-на-1-на-1», как в следующей задаче:

$$
\begin{array}{rl}
513 & (57 \times 9) \\
\underline{\times\ 246} & (41 \times 6)
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
57 \times 41 \times 9 \times 6 &= 2{,}337 \times 9 \times 6 \\
&= 21{,}033 \times 6 \\
&= 126{,}198
\end{aligned}
$$

Как обычно, лучше всего сразу избавиться от тяжёлого элемента задачи (2-на-2). Как только вы сделали это, она будет сведена к «4-на-1», а затем к «5-на-1».

Почти всегда, только одно из чисел будет раскладываться. В таком случае, можно будет свести задачу к «3-на-2-на-1», как в следующем примере:

$$\begin{array}{r} 459\ (51 \times 9) \\ \times\ 526 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{aligned} 526 \times 459 &= 526 \times 51 \times 9 \\ &= 526 \times (50 + 1) \times 9 \\ &= 26{,}826 \times 9 \\ &= 241{,}434 \end{aligned}$$

Следующая задача «3-на-3», в действительности, просто замаскированная «3-на-2»:

$$\begin{array}{r} 624 \\ \times\ 435 \\ \hline \end{array}$$

Путём удвоения 435 и сокращения 624 на половину, мы получаем эквивалентную задачу:

$$\begin{array}{r} 312\ (52 \times 6) \\ \underline{\times\ 870}\ (87 \times 10) \end{array}$$

$$\begin{aligned} 87 \times 52 \times 6 \times 10 &= 87 \times (50 + 2) \times 6 \times 10 \\ &= 4{,}524 \times 6 \times 10 \\ &= 27{,}144 \times 10 \\ &= 271{,}440 \end{aligned}$$

Метод совместной близости

Вы готовы к кое-чему полегче? Следующая «срезка», которую мы представили в Главе 0, основана на следующей алгебраической формуле:

$$(z + a)(z + b) = z^2 + za + zb + ab$$

Что мы переписываем как:

$$(z + a)(z + b) = z(z + a + b) + ab$$

Эта формула правомерна для любых значений z, a и b. Мы будем пользоваться этим всякий раз, когда трёхзначные числа, которые нужно перемножить (z x a и z x b), находятся близко к лёгкому числу z (типичный случай - число с кучей нулей). Например, умножим:

$$\begin{array}{r} 107 \\ \times\ 111 \\ \hline \end{array}$$

Мы будем рассматривать эту задачу как (100 x 7)(100 x 11). Благодаря использованию z x 100, a x 7, b x 11 наша формула даёт нам:

$$\begin{aligned} 100(100 + 7 + 11) + 7 \times 11 &= 100 \times 118 + 77 \\ &= 11{,}877 \end{aligned}$$

Я схематически изобразил задачу вот так:

$$\begin{array}{rrl} & 107 & (7) \\ & \times\ \ 111 & (11) \\ \cline{2-2} 100 \times 118 = & 11{,}800 & \\ 7 \times 11 = & +\quad 77 & \\ \cline{2-2} & 11{,}877 & \end{array}$$

Цифры в скобках обозначают разницу между числом и нашим удобным «базовым числом» (здесь, z = 100). Число 118 может быть получено либо через сложение 107 + 11, либо через 111 + 7. По законам алгебры, обе эти суммы эквивалентны, так как (z x a) b (z x b) a.

В этот раз без лишней болтовни, вот вам ещё одна «ускорялка»:

$$\begin{array}{rrl} & 109 & (9) \\ & \times\ \underline{\quad 104} & (4) \\ 100 \times 113 = & 11{,}300 & \\ 9 \times 4 = & \underline{+\quad 36} & \\ & 11{,}336 & \end{array}$$

Всё чётко!

Давайте слегка поднимем ставке и возьмём базовое число побольше.

$$\begin{array}{rrl} & 408 & (8) \\ & \times\ \underline{\quad 409} & (9) \\ 400 \times 417 = & 166{,}800 & \\ 8 \times 9 = & \underline{+\quad 72} & \\ & 166{,}872 & \end{array}$$

Хотя данный метод обычно и используется для умножения трёхзначных чисел, мы также можем применить его для задачи «2-на-2»:

$$\begin{array}{rrl} & 78 & (8) \\ & \times\ \underline{\quad 73} & (3) \\ 70 \times 81 = & 5{,}670 & \\ 8 \times 3 = & \underline{+\quad 24} & \\ & 5{,}694 & \end{array}$$

Здесь базовое число 70, его мы умножаем на 81 (78 + 3). Даже действие на сложение обычно очень простое.

Мы также можем применить данный метод, когда два числа оба меньше, чем базовое. Как, например, в следующей задачке, где оба числа меньше 400:

$$
\begin{array}{rr}
 & 396\ (-4) \\
\times & \underline{387}\ (-13) \\
400 \times 383 = & 153{,}200 \\
-4 \times -13 = & +\quad \underline{52} \\
 & 153{,}252
\end{array}
$$

Число 383 может быть получено действием 396 - 13, или 387 - 4. Я буду использовать данный метод для задач типа «2-на-2», таких как эти:

$$
\begin{array}{rr}
 & 97\ (-3) \\
\times & \underline{94}\ (-6) \\
100 \times 91 = & 9{,}100 \\
-3 \times -6 = & +\quad \underline{18} \\
 & 9{,}118
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rr}
 & 79\ (-1) \\
\times & \underline{78}\ (-2) \\
80 \times 77 = & 6{,}160 \\
-1 \times -2 = & +\quad \underline{2} \\
 & 6{,}162
\end{array}
$$

В нашем следующем примере базовое число находится между перемножаемыми числами:

$$
\begin{array}{rrl}
 & 396 & (-4) \\
 & \times \quad 413 & (13) \\
\hline
400 \times 409 = & 163{,}600 & \\
-4 \times 13 = & - \quad 52 & \\
\hline
 & 163{,}548 &
\end{array}
$$

Число 409 получено по результатам 396 + 13, или 413 - 4. Обратите внимание, что с тех пор, как -4 и 13 имеют противоположные знаки, мы должны вычесть 52.

Давайте поднимем ставки ещё выше, до уровня, где второе действие требует умножения «2-на-2»:

$$
\begin{array}{rrl}
 & 621 & (21) \\
 & \times \quad 637 & (37) \\
\hline
600 \times 658 = & 394{,}800 & \\
21 \times 37 = & + \quad 777 & (37 \times 7 \times 3) \\
\hline
 & 395{,}577 &
\end{array}
$$

Здесь мы обращаем внимание на то, что первое действие в задачке (600 х 658) уже само по себе является разумной оценкой. Наш метод позволяет вам перейти от оценки к точному ответу.

$$\begin{array}{rr} & 876\ (-24) \\ \times & \underline{853}\ (-47) \\ 900 \times 829 = & 746{,}100 \\ -24 \times -47 = & \underline{+\ \ 1{,}128}\ (47 \times 6 \times 4) \\ & 747{,}228 \end{array}$$

Также обратите внимание, что во всех этих примерах числа, которые мы перемножаем в первом действии, обладают такой же суммой, как и исходные числа. Например, в задачке выше, 900 + 829 = 1729, как и 876 + 853 = 1729. Это потому, что:

$$z + [(z + a) + b] = (z + a) + (z + b)$$

Следовательно, чтобы получить число, которое будет умножено на 900 (которое, как вы знаете, будет в районе 800>), вам всего лишь нужно взглянуть на последние две цифры 76 х 53 = 129, чтобы определить 829.

В следующем примере, сложение 827 + 761 = 1588 подсказывает нам, что следует просто умножить 800 х 788, а затем вычесть 27 х 39 следующим образом:

$$\begin{array}{rr} & 827\ (+27) \\ \times & \underline{761}\ (-39) \\ 800 \times 788 = & 630{,}400 \\ -39 \times 27 = & \underline{-\ \ 1{,}053}\ (39 \times 9 \times 3) \\ & 629{,}347 \end{array}$$

Этот метод настолько эффективен, что если задача «3-на-3», над которой вы сидите в настоящий момент, состоит из чисел далёких друг от друга, то вы можете иногда видоизменить проблему путём деления одного и умножения другого чисел на одинаковую величину (тем самым приблизив их друг к другу). Например, задача 672 x 157 может быть решена так:

$$\begin{array}{r} 672 \\ \times\ 157 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} \div 2 = \\ \times 2 = \end{array} \quad \begin{array}{r} 336 \\ \times\ 314 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} (36) \\ (14) \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} 300 \times 350 = & 105{,}000 \\ 36 \times 14 = & +\quad 504 \\ \hline & 105{,}504 \end{array} \ (36 \times 7 \times 2)$$

Когда умножаемые числа одинаковые (ближе друг к другу уже некуда!), обратите внимание, что вычисления методом «close-together» генерируют в точности такие же вычисления, какие вы выполняете во время традиционной процедуры возведения в квадрат:

$$\begin{array}{rr} & 347\ (47) \\ & \times\quad 347\ (47) \\ \hline 300 \times 394 = & 118{,}200 \\ 47^2 = & +\quad 2{,}209 \\ \hline & 120{,}409 \end{array}$$

Метод сложения

Когда ни один из предыдущих методов не работает, я ищу возможность использовать метод сложения, в особенности, когда первые две цифры одного из трёхзначных чисел легки в обращении. Например, в задаче ниже, «64» из 641 раскладывается на 8 x 8, так что я бы решил её следующим образом:

$$
\begin{array}{rrl}
 & 373 & \\
 & \times \quad 641 & (640 + 1) \\
\hline
640 \times 373 = & 238{,}720 & (373 \times 8 \times 8 \times 10) \\
1 \times 373 = & + \quad 373 & \\
\hline
 & 239{,}093 &
\end{array}
$$

Схожим образом, в следующем примере «42» из 427 раскладывается как 8 x 8, так что вы можете использовать метод сложения и представить 427 в виде 420 + 7:

$$
\begin{array}{rl}
656 & \\
\times\ 427 & (61 \times 7) \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
656 \times 61 \times 7 &= 656 \times (60 + 1) \times 7 \\
&= 40{,}016 \times 7 \\
&= 280{,}112
\end{aligned}
$$

Часто я разбиваю последнюю задачку на сложение на два этапа, как здесь:

$$
\begin{array}{rr}
 & 275{,}520 \\
7 \times 600 = & \underline{+\quad 4{,}200} \\
 & 279{,}720 \\
7 \times 56 = & \underline{+\qquad 392} \\
 & 280{,}112
\end{array}
$$

Так как задачки, которые могут быть решены методом сложения, требуют определённых усилий, я обычно сворачиваю с данной дорожки с целью найти способ, который в результате приведёт к простым вычисления в концовке. Например, задача выше могла быть решена с использованием факторинга. По сути, вот какое бы я выбрал решение:

$$\begin{array}{r} 656 \\ \times\ \underline{427}\ (61 \times 7) \end{array}$$

$$\begin{aligned} 656 \times 61 \times 7 &= 656 \times (60 + 1) \times 7 \\ &= 40{,}016 \times 7 \\ &= 280{,}112 \end{aligned}$$

Самые простые задачи, которые могут быть решены методом сложения, содержат одно число с 0 в середине, как показано ниже:

$$\begin{array}{rr} & 732 \\ & \times \quad \underline{308}\ (300 + 8) \\ 300 \times 732 = & 219{,}600 \\ 8 \times 732 = & +\quad \underline{5{,}856} \\ & 225{,}456 \end{array}$$

Такие задачи, как правило, намного проще, чем другие, которые тоже можно решить таким способом. Так что стоит вглядываться в пример «3-на-3» на предмет его конвертации в такую задачу. Это окупается. Например, 732 x 308 можно было бы получить с помощью любого из «безнулевых» примеров ниже:

$$\begin{array}{rr} 244 \times 3 = & 732 \\ \underline{\times\ 924} \div 3 = & \underline{\times\ 308} \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{rr} 366 \times 2 = & 732 \\ \underline{\times\ 616} \div 2 = & \underline{\times\ 308} \end{array}$$

Мы упоминали, что другой способ решения данной задачи состоит в действии 308 x 366 x 2, и использовании преимущества близости нахождения 308 и 366. Давайте прорешаем ещё «крепкий орешек»:

$$\begin{array}{rrl} & 739 & \\ & \underline{\times \quad 443} & (440 + 3) \\ 440 \times 739 = & 325{,}160 & (739 \times 11 \times 4 \times 10) \\ 3 \times 700 = & \underline{+ \quad 2{,}100} & \\ & 327{,}260 & \\ 3 \times 39 = & \underline{+ \qquad 117} & \\ & 327{,}377 & \end{array}$$

Метод вычитания

Метод вычитания - то самое орудие, которое я время от времени использую, когда одно из трёхзначных чисел может быть округлено до простого двузначного число с 0 на конце, как в следующем примере:

$$
\begin{array}{rrl}
 & 719 & (720 - 1) \\
 & \times\quad 247 & \\
\hline
720 \times 247 = & 177{,}840 & (247 \times 9 \times 8 \times 10) \\
-1 \times 247 = & -\quad 247 & \\
\hline
 & 177{,}593 &
\end{array}
$$

Аналогично в следующей задачке:

$$
\begin{array}{rrl}
 & 538 & (540 - 2) \\
 & \times\quad 346 & \\
\hline
540 \times 346 = & 186{,}840 & (346 \times 6 \times 9 \times 10) \\
-2 \times 346 = & -\quad 692 & \\
\hline
 & 186{,}148 &
\end{array}
$$

Метод «когда всё остальное не работает»

Когда всё остальное не срабатывает, я использую следующий метод, который очень надёжен, когда вы не можете найти ничего другого для применения. При использовании «когда всё остальное не работает» метода, задача «3-на-3» разбивается на 3 части: «3-на-1», «2-на-1» и «2-на-2». По мере своих расчётов вы на ходу суммируете полученное. Такие примеры сложные, особенно если вы не можете видеть исходное число. Во время своих выступлений с примерами «3-на-3» и «5-на-5» у меня под рукой записанные условия, но я произвожу все расчёты в уме.

Вот пример:

$$
\begin{array}{rr}
 & 851 \\
 & \times \quad 527 \\
\hline
500 \times 851 = & 425{,}500 \\
27 \times 800 = & +\ 21{,}600 \\
\hline
 & 447{,}100 \\
27 \times 51 = & +\ \ 1{,}377 \\
\hline
 & 448{,}477
\end{array}
$$

На практике, вычисления действительно происходят как показано ниже. Иногда я использую фонетический код для хранения в памяти тысяч (здесь, 447) и хранения сотен (1) на пальцах:

$$
\begin{array}{rrr}
 & 851 & \\
 & \times\ 527 & \\
\cline{2-2}
5 \times 851 = & 4{,}255 & \\
8 \times 27 = & +\ 216 & \\
\cline{2-2}
 & 4{,}471 \times 100 = & 447{,}100 \\
 & 51 \times 27 = & +\ 1{,}377 \\
\cline{3-3}
 & & 448{,}477
\end{array}
$$

Давайте решим ещё один пример, но на этот раз я разобью на части первое число. (обычно я так поступаю с большим из них, так задача на сложение становится легче)

$$
\begin{array}{r}
923 \\
\times\ 673 \\
\hline
9 \times 673 = \ 6{,}057 \\
6 \times 23 = +\ 138 \\
\hline
6{,}195 \times 100 = 619{,}500 \\
73 \times 23 = +\ 1{,}679 \\
\hline
621{,}179
\end{array}
$$

Упражнение: умножение типа «3-на-3»

Следующие задачи встроены в примеры «5-на-5», которые находятся в следующем разделе:

1. 644×286
2. 596×167
3. 853×325
4. 343×226
5. 809×527
6. 942×879
7. 692×644
8. 446×176
9. 658×468
10. 273×138
11. 824×206
12. 642×249
13. 783×589
14. 871×926
15. 341×715
16. 417×298
17. 557×756
18. 976×878
19. 765×350

Умножение «5-на-5»

Самая огромная задача, которую мы попытаемся решить в уме, состоит из двух пятизначных чисел. Для выполнения «5-на-5» вам необходимо в совершенстве овладеть умением решать «2-на-2», «2-на-3» и «3-на-3» (а также уметь применять фонетический код). Теперь это просто вопрос соединения всего воедино. Как и при возведении в квадрат пятизначных чисел, вы будете использовать распределительный закон для разбития чисел на составные части. Например:

$$\begin{array}{rl} 27{,}639 & (27{,}000 + 639) \\ \times\ \underline{52{,}196} & (52{,}000 + 196) \end{array}$$

Основываясь на этом, вы можете разбить задачу на четыре более лёгких примера на умножение (что я и проиллюстрировал ниже, в стиле «крест-накрест», как «2-на-2», два «3-на-2» и, наконец, «3-на-3», просуммировав общий итог). То есть,

$$\begin{array}{l} (27 \times 52) \text{ миллион} \\ + [(27 \times 196) + (52 \times 639)] \text{ тысяча} \\ + (639 \times 196) \end{array}$$

Как и при возведении пятизначных чисел в квадрат, я начинаю с середины, берясь за «3-на-2» (с тяжелейшего из них):

1. $52 \times 639 = 52 \times 71 \times 9 = 3{,}692 \times 9 = 33{,}228$

Вверив 33 228 нашей памяти с помощью кода, вы далее переключаетесь на вторую задачу «3-на-2»:

$$2.\quad 27 \times 196 = 27 \times (200 - 4) = 5{,}400 - 108 = 5{,}292$$

и прибавляете к числу, которое уже храните в памяти:

$$3.\quad \begin{array}{r} 33{,}228 \\ +\ 5{,}292 \\ \hline 38{,}520 \end{array}$$ **(фонетический код)**

для получения новой суммы, которую мы храним как:

Фонетический код (38 миллионов, 520 тысяч)

Удерживая данный код, решаем задучу «2-на-2»:

$$4.\quad 52 \times 27 = 52 \times 9 \times 3 = 1{,}404$$

На данной стадии вы уже можете дать частичный ответ. Так как наша задача «2-на-2» представляет собой 52 х 27 миллионов, то 1404 представляет собой 1 миллиард 404 миллиона. Раз уж 404 миллиона не подразумевают переноса чисел, вы можете спокойно произнести «Один миллиард…»

$$5.\quad 404 + \underset{\text{ПЕРВАЯ ПОЛОВИНА КОДА}}{(38)} = 442$$

На данном этапе вы прибавляете 404 к первой половине кода (38), дабы получить 442. В этот момент вы можете сказать «…442 миллиона…» Вы можете так сделать потому, что вы знаете: на 442 не будет переноса чисел. Вы посмотрели вперёд на задачу «3-на-3», чтобы увидеть, будет ли причина для, которая к этому приведёт. Если да, то вы бы сказали «443 миллиона». Но так как предыдущий код - это 520 000, и результаты задачи «3-на-3» (639 x 196) не перевалили за 500 000 (грубая оценка 600 x 200 демонстрирует это), вы в безопасности.

6. $639 \times 196 = 639 \times 7 \times 7 \times 4 = 4{,}473 \times 7 \times 4$
$= 31{,}311 \times 4 = 125{,}244$

Всё ещё удерживая 520 000 (и код) в голове, вы теперь решаете «3-на-3», используя метод факторинга, чтобы получить 125 244. Вы также могли бы перевести 244 в какой-либо код. Итоговое действие представляет собой простое сложение:

7. $125{,}244 +$ **КОД** $(520{,}000)$

Это позволяет вам произнести оставшуюся часть ответа: «… 645 244» Так как одна картинка стоит тысячи калькуляций, вот наше изображение того, как это должно выглядеть:

$$\begin{array}{r} 27{,}639 \\ \times\ 52{,}196 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{aligned} 639 \times 52 &= \ 33{,}228 \\ 196 \times 27 &= \underline{+\ 5{,}292} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rr} 38{,}520 \times 1{,}000 = & 38{,}520{,}000 \\ 52 \times 27 \times 1 \text{ million} = & \underline{+\ 1{,}404{,}000{,}000} \\ & 1{,}442{,}520{,}000 \\ 639 \times 196 = & \underline{+\qquad\quad 125{,}244} \\ & 1{,}442{,}645{,}244 \end{array}$$

Мне следует сделать здесь вставленную мимоходом заметку касательно моего предположения о том, при решении задачи типа «5-на-5» у вас есть возможность записать условия на доске или бумаге. Если нет, то вам придётся задавать мнемонический код для каждых четырёх чисел. Например, в прошлой задаче, вы могли хранить условия в виде:

$$\begin{array}{rl} 27{,}639 & \text{— Код для тысяч и сотен} \\ \underline{\times\ 52{,}196} & \text{— Код для тысяч и сотен} \end{array}$$

Потом вы бы умножили (в соответствии с заданным кодом) *52 x 639, 196 x 27, 52 x 27* и, наконец, *196 x 639.* Очевидно, это бы слегка замедлило вас, но если вас привлекают дополнительные трудности в виде отсутствия текста с числами, вы всё ещё будете в состоянии решить задачу.

Закончим главу ещё одним примером «5-на-5»:

$$\begin{array}{r} 79{,}838 \\ \times\ 45{,}547 \\ \hline \end{array}$$

Шаги такие же, как при решении прошлой задачи. Вы начинаете с самого сложного примера «3-на-2» и сохраняете ответ в виде кода:

1. $547 \times 79 = 547 \times (80 - 1) = 43{,}760 - 547$
   $= 43{,}213$— **Код для тысяч и сотен**

Затем проводите расчёты для другого «3-на-2».

2. $838 \times 45 = 838 \times 5 \times 9 = 4{,}190 \times 9 = 37{,}710$

Суммируете полученное, и вверяете итог своей памяти.

3. $\begin{array}{r} 43{,}213 \\ +\ 37{,}710 \\ \hline 80{,}923 \end{array}$
   43,213— **КОД**; 80,923— **КОД**

4. $79 \times 45 = 79 \times 9 \times 5 = 711 \times 5 = 3{,}555$

Результат задачи «2-на-2» даёт вам первую цифру окончательного ответа, которую вы с уверенностью можете произнести вслух: «Три миллиарда…»

$$5.\quad 555 + \underset{\text{кода}}{\overset{\text{Первая}}{\text{часть}}} (80) = 635$$

Миллионы в ответе содержат перенос цифр с 635 до 636, потому что ко *второй части кода* (923) достаточно лишь прибавить 77 000, чтобы бы вызвать перенос чисел. А задача «3-на-3» (838 х 547) с лёгкостью перевалит за это значение. Так что проговорите: «…636 миллионов…»

Задача «3-на-3» была посчитана с использованием метода сложения:

$$
\begin{array}{lrrl}
6. & & 838 & \\
 & & \times\quad 547 & (540 + 7) \\
\hline
 & 540 \times 838 = & 452{,}520 & (838 \times 9 \times 6 \times 10) \\
 & 7 \times 800 = & +\quad 5{,}600 & \\
\hline
 & & 458{,}120 & \\
 & 7 \times 38 = & +\quad 266 & \\
\hline
 & & 458{,}386 &
\end{array}
$$

На следующем этапе вы прибавляете общую сумму ко второй части кода (923,000):

$$
\begin{array}{lr}
\textbf{7.} & 923{,}000 \\
 & \underline{+\ 458{,}386} \\
 & 1{,}381{,}386
\end{array}
$$

Так как вы уже использовали 1 для переноса и получения 636 миллионов, вам лишь осталось проговорить тысячи: «…381 тысяча… 386» и насладиться аплодисментами!

Данная задача может быть проиллюстрирована следующим образом:

$$
\begin{array}{r}
79{,}838 \\
\underline{\times\ 45{,}547}
\end{array}
$$

Код для тысяч и сотен

$$
\begin{array}{rr}
547 \times 79 = & 43{,}213 \\
838 \times 45 = & \underline{+37{,}710}
\end{array}
$$

Код для миллионов и тысяч

$$
\begin{array}{rr}
80{,}923 \times 1{,}000 = & 80{,}923{,}000 \\
79 \times 45 \times 1 \text{ million} = & \underline{+\ 3{,}555{,}000{,}000} \\
 & 3{,}635{,}923{,}000 \\
838 \times 547 = & \underline{+\qquad 458{,}386} \\
 & 3{,}636{,}381{,}386
\end{array}
$$

Упражнение: умножение «5-на-5»

1. $\begin{array}{r} 65{,}154 \\ \times\ 19{,}423 \\ \hline \end{array}$

2. $\begin{array}{r} 34{,}545 \\ \times\ 27{,}834 \\ \hline \end{array}$

3. $\begin{array}{r} 69{,}216 \\ \times\ 78{,}653 \\ \hline \end{array}$

4. $\begin{array}{r} 95{,}393 \\ \times\ 81{,}822 \\ \hline \end{array}$

ГЛАВА 9

Фокусничаем: искусство матемагии

Я всегда получал удовольствие от игры с цифрами. Я нахожу арифметику такой же занимательной как магия. Но понимание магических секретов арифметики требует знаний в алгебре. Конечно, есть и другие причины для её изучения. Назову лишь несколько из них: сдача экзаменов, моделирование проблем из реального мира, программирование и возможность понимания высшей математики. Но что первое заинтересовало меня в алгебре, так это желание понять некоторые матемагические трюки, которые я сейчас представлю вам!

Экстрасенсорная математика

Скажите добровольцу в аудитории: «Загадайте число, любое число». Вам также следует произнести: «Но чтобы не утруждать себя, придумайте число из одной-двух цифр». После того, как вы напомнили добровольцу, что вы никоим образом не можете знать число у него в голове, попросите следующее:

- Удвойте число
- Прибавьте 12
- Разделите сумму на 2
- Вычтите из неё исходное число

Затем скажите: «Думаете ли вы сейчас о цифре 6?» Опробуйте это сначала на себе и вы увидите, что данная последовательность всегда в итоге приводит к цифре 6, несмотря на то, какое число было изначально выбрано.

Почему это работает

Данный трюк целиком основан на простой алгебре. В действительности, я иногда использую его как способ представить алгебру студентам. Секретное число, которое выбирает ваш волонтёр, может быть представлено как X. Вот действия, которые вы совершали (в том порядке, в котором вы их совершали):

- ✓ 2X (удвоить число)
- ✓ 2X + 12 (прибавить 12)
- ✓ (2X + 12)/2 = X + 6 (разделите на 2)
- ✓ X + 6 - X (вычтите исходное число)

Так что неважно, какое число выберет доброволец: итоговый ответ всегда будет 6. Если вы будете повторять данный приём, попросите добровольца прибавить другое число на втором шаге (скажем, 18). Итоговый ответ будет половиной этого числа (а именно 9).

Магическое 1089!

А вот трикс, существующий уже который век. Сделайте так, чтобы человек из аудитории достал ручку с бумагой и:

- ☑ Тайно записал трёхзначное число, цифры которого идут в порядке уменьшения (как 851 или 973).
- ☑ Перевернул число задом наперёд и отнял это значение из исходного числа
- ☑ Полученный ответ прибавил к исходному числу, записанному задом наперёд

В конце последовательности, магическим образом появится ответ 1089, несмотря на то, какое число выбрал ваш доброволец. Например:

$$\begin{array}{r} 851 \\ -\,158 \\ \hline 693 \\ +\,396 \\ \hline 1089 \end{array}$$

Почему это работает

Неважно, какое трёхзначное число вы или кто-либо другой выберете в этой игре, окончательный ответ всегда будет 1089. Почему? Обозначим ABC как неизвестное трёхзначное число. Алгебраически, это равняется:

$$100a + 10b + c$$

Когда вы переворачивает число и вычитаете его из исходника, то получаете число CBA, которое алгебраически равно:

$$100c + 10b + a$$

После вычитания CBA из ABC, вы получаете:

$$\begin{aligned} 100a + 10b + c - (100c + 10b + a) \\ = 100(a - c) + (c - a) \\ = 99(a - c) \end{aligned}$$

Следовательно, после вычитания на шаге 2, мы должны получить одно из следующих кратных 99: 297, 396, 495, 594, 693, 792 или 891, каждое из которых в итоге даст 1089 после прибавления к нему своей перевёрнутой версии, как мы и поступаем на шаге 3.

Трюк с пропущенной цифрой

Используя 1089 из прошлого действия, вручите добровольцу калькулятор и попросите его умножить 1089 на трёхзначное число (на его вкус), но не говорить вам, что это за число. (скажем, он тайно умножит 1089 x 256 = 278 784) Теперь спросите, сколько цифр в полученном ответе. Ответ будет: «Шесть».

Дальше вы говорите: «Громко назовите пять из этих шести цифр в любом порядке. Я попытаюсь определить недостающую». Предположим, волонтёр выкрикивает: «Два…четыре…семь…восемь…восемь». Вы вежливо говорите ему, что он пропустил цифру 7. Секрет основан на том факте, что число кратно 9 тогда, и только тогда, когда его цифры в сумме дают кратное 9. Так как 1 + 0 + 8 + 9 = 18 кратно 9, значит и 1089 кратно 9. Таким образом, 1089 при умножении на любое целое число даст кратное 9. И раз уж прозвучавшие цифры в сумме дают 29, и следующее кратное 9, которое больше 29, это 36, то наш доброволец должно быть не учёл число 7 (так как 29 + 7 = 36). Есть более утончённые способы заставить добровольца в конечном итоге прийти к кратному 9. Вот некоторые из моих любимых:

- Пусть он наугад выберет шестизначное число, перемешает его цифры, затем отнимет меньшее из шестизначных чисел из большего. Так как мы производим вычитание двух чисел с одинаковой модульной суммой (в самом деле, сумма цифр идентична), полученная в итоге разница будет иметь модульную сумму в размере 0, и, следовательно, число будет кратно 9. Далее продолжайте как и раньше, чтобы найти недостающую цифру.
- Пусть он тайно выберет четырёхзначное число, перевернёт его задом наперёд, а потом вычтет меньшее из чисел из большего. (получится кратное 9) Затем пусть умножит полученное число на 3, а вы продолжайте как и раньше.

✱ Попросите его умножать цифры друг на друга до тех пор, пока их произведение не превратится в семизначное число. Это будет не «гарантированное» кратное 9, но на практике так получается не меньше, чем в 90% случаев (шансы высоки, что перемножаемые цифры будут включать 9-ки или две 3-ки, или две 6-ки, или 3 и 6). Я часто использую данный способ, когда выступаю перед математически продвинутой аудиторией, которая может раскусить другие методы.

Существует кое-какая проблема, за которой нужен глаз да глаз. Предположим, прозвучавшие числа в сумме дают кратное 9 (скажем, 18). После такого у вас не будет возможности определить, пропущен ли 0 или 9. Как исправить это? Легко - сжульничайте! Просто скажите: «Вы ведь не пропустили 0, не так ли?» Если был пропущен 0, то вы успешно провернули свой трюк. Если нет, то скажите: «Оу, просто казалось, будто в голове у вас пусто! Вы не пропустили один, два, три или четыре, не так ли?» Доброволец либо покачает головой, либо скажет «нет». Затем вы продолжаете: «Как и не пропустили вы пять, шесть, семь или восемь. Вы не включили девять, не так ли?» Доброволец ответит утвердительно, и вы получите ваши заслуженные аплодисменты!

Сложение-чехарда

Данный приём сочетает в себе быстрые ментальные вычисления и поразительные предсказания. Вручите зрителю карту с десятью линиями на ней, пронумерованными от 1 до 10. Пусть зритель загадает два положительных числа от 1 до 20 и подпишет ими линии 1 и 2.

Далее попросите его записать сумму 1 и 2 линий на линии 3. Затем сумму линии 2 и 3 на линии 4, и так далее, как проиллюстрировано ниже.

1	9
2	2
3	11
4	13
5	24
6	37
7	61
8	98
9	159
10	257

Наконец зритель показывает вам карту. Вы сразу же можете сказать ему сумму всех чисел на карточке. Например, в нашем случае, вы могли бы мгновенно объявить, что числа в сумме дают 671, даже быстрее, чем зритель сделал бы это с калькулятором. В качестве «нежданчика», вручите зрителю калькулятор и и попросите его разделить число на линии 10 на число с линии 9. В нашем примере, частное 257/159 = 1,616. Пусть он озвучит первые три цифры частного, а после перевернёт карточку (там вы уже написали своё предсказание). Зритель будет очень удивлён тому, что вы уже записали число 1,61!

Почему это работает

Для проведения быстрых вычислений вам просто нужно умножить число с линии 7 на 11. Здесь 61 x 11 = 671. Причина, по которой это работает проиллюстрирована в таблице ниже. Если мы обозначим числа на линиях 1 и 2 как X и У, соответственно, а затем просуммируем линии от 1 до 10, то получим 55x + 88y, что равняется 11 x (5x + 8y). А это равно тому, чтобы взять одиннадцать раз по числу на линии 7.

1	x
2	y
3	$x + y$
4	$x + 2y$
5	$2x + 3y$
6	$3x + 5y$
7	$5x + 8y$
8	$8x + 13y$
9	$13x + 21y$
10	$21x + 34y$
Total:	$55x + 88y$

Что касается предсказания, мы используем тот факт, что для любого положительного числа (a, b, c, d), если a/b < c/d, дробь, которую вы получите путём «ошибочного сложения дробей» (например, сложение числителей и сложение знаминателей), будет находиться между двумя исходными дробями. То есть,

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

$$1.615\ldots = \frac{21x}{13x} < \frac{21x + 34y}{13x + 21y} < \frac{34y}{21y} = 1.619\ldots$$

Таким образом, частное линии 10, делённой на линию 9, (21x + 34y)/(13x + 21y), должно лежать между

Следовательно, пропорция должна начинаться с цифр 1,61, как и было предсказано.

По сути, если вы продолжите такую «чехарду» вплоть до бесконечности, отношение последовательно идущих значений будет подбираться все ближе и ближе к

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.6180339887\ldots$$

числу с таким огромным количеством удивительно красивых и загадочных свойств, что его часто называют золотое отношение (золотое сечение).

Магичиские квадраты

Вы готовы к испытанию совершенно другого порядка? Ниже вы найдёте то, что называют «магичиский квадрат». Столько всего было написано на данную тему и о том, как составлять их (вплоть до времен Древнего Китая). Здесь мы описываем способ презентации магических квадратов в развлекательном стиле. Вот заученная схема, которую я исполнял годами.

Я показываю визитку со следующей надписью на задней стороне:

8	11	14	1
13	2	7	12
3	16	9	6
10	5	4	15

= 34

Я говорю : «Это называется магический квадрат. По сути, это самый маленький магический квадрат, который вы можете создать, используя числа от одного до шестнадцати. Вы заметите, что каждая строка и каждый столбец при сложении всех элементов дают одно и то же число - тридцать четыре. Сейчас, когда я провёл такое обширное исследование на тему магических квадратов, я предлагаю создать один для вас прямо у вас на глазах».

Затем я прошу кого-либо из аудитории дать мне любое число больше 34. Давайте предположим, что мне назвали 67.

После я достаю ещё одну визитку и рисую пустую сетку 4-на-4 и помещаю число 67 справа от неё. Далее, я прошу человека указать на квадраты, по-одному, в любом порядке. Как только он указывает на пустую клетку, я незамедлительно записываю в неё число. Конечный результат выглядит так:

16	19	23	9
22	10	15	20
11	25	17	14
18	13	12	24

= 67

Я продолжаю: «В случае с первым магическим квадратом, каждая строка и каждый столбец при сложении давали тридцать четыре. (на данной стадии, я обычно откладываю карточку с этим квадратом в сторону) Давайте посмотрим, что у нас получилось с новым квадратом». После проверки того, что кадая строка и каждый столбец в сумме равняются 67, я говорю: «Но я не останавливаюсь на этом. Специально для вас, я решил зайти ещё на один шаг дальше. Обратите внимание, обе диагонали при сложении дают шестьдесят семь!» Затем я указываю, что четыре квадратика в левом верхнем углу в сумме дают 67 (16 + 19 + 22 + 10 = 64), как и все остальные строки и столбцы такого размера! «Они все в сумму равны шестидесяти семи. Но не верьте мне наслово. Пожалуйста, оставьте себе магический квадрат в качестве сувенира от меня и проверьте его потом сами!»

Как составить магический квадрат

Вы можете создать магический квадрат, который бы при суммирование давал любое число, воспользовавшись с выгодой для себя исходным магическим квадратом, который в сумме даёт 34. Держите его на виду, когда создаёте новый для добровольца. Пока вы чертите сетку 4-на-4, устно выполните вычисления для шагов 1 и 2:

* Вычтите 34 из заданного числа (например, 67 - 34 = 33)
* Разделите полученное число на 4 (например, 33/4 = 8 с остатком 1)

Частное есть первое «магическое» число. Частное плюс остаток есть второе «магическое» число. (здесь наши магические числа 8 и 9)

* Когда доброволец показывает на клетку, незаметно взгляните на квадрат-34 и посмотрите, какой квадратик является корреспондирующим. Если это 13, 14, 15 или 16, прибавьте второе число (в нашем примере, 9). Если нет, то прибавьте первое магическое число (8)
* Вставляйте подходящее число до тех пор, пока не закончите составление магического квадрата

Обратите внимание: когда заданное число - чётное, но не кратное 4, то ваши первое и второе магические числа будут одинаковыми. Так что у вас будет только одно магическое число для прибавления его к числам из квадрата-34.

Почему это работает

Причина, по которой данный метод работает, основана на том факте, что каждая строка, столбец, диагональ из изначально показанного магического квадрата при сложение даёт 34. Предположим, заданное число 82. Так как 82 - 34 = 48 (и 48/4 = 12), мы будет прибавлять 12 к каждому числу в квадратике. Затем каджая «группа четвёрок», которая до этого равнялась 34, будет при сложении давать 34 + 48 = 82. Рассмотрите магический квадрат ниже.

20	23	26	13
25	14	19	24
15	28	21	18
22	17	16	27

= 82

С другой стороны, если заданное число было бы 85, наши магические числа были бы 12 и 15. Так что нам мы бы прибавляли на 3 больше к квадратикам, которые содержат числа 13, 14, 15 и 16. Так как каждая строка, столбец и группа четвёрок содержит в точности одно из этих чисел, каждая группа четвёрок теперь будет при сложении давать 34 + 48 + 3 = 85, как в следующем магическом квадрате.

20	23	29	13
28	14	19	24
15	31	21	18
22	17	16	30

= 85

В качестве интересного матемагического пустячка, позвольте мне отметить еще одно удивительное свойство знаменитого магического квадрата 3-на-3 ниже.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

= 15

Не только строки, столбцы и диагонали суммируются до 15, но если вы представите строки магического квадрата как трёхзначные числа, то сможете удостовериться на калькуляторе, что $492^2 + 357^2 + 816^2 = 294^2 + 753^2 + 618^2$. Также $438^2 + 951^2 + 276^2 = 834^2 + 159^2 + 672^2$. Если вам любопытно, почему так происходит, вы возможно захотите изучить мою статью «В самом деле «магические» квадраты!»

Быстрые кубические корни

Попросите кого-нибудь выбрать двузначное число и сохранить его в секрете. Затем попросите его возвести число в куб, то есть умножить его само на себя дважды (используя калькулятор). Например, если секретное число 68, пусть доброволец посчитает 68 x 68 x 68 = 314 432. Затем попросите его сказать вам ответ. Как только он назовёт вам куб, 314 432, вы можете мгновенно раскрыть секрет исходного числа - кубический корень, 68. Как?

Чтобы рассчитывать кубические корни, вам нужно выучить кубы чисел от 1 до 10:

$$
\begin{aligned}
1^3 &= 1\\
2^3 &= 8\\
3^3 &= 27\\
4^3 &= 64\\
5^3 &= 125\\
6^3 &= 216\\
7^3 &= 343\\
8^3 &= 512\\
9^3 &= 729\\
10^3 &= 1000
\end{aligned}
$$

Как только вы выучите эти значения, расчёт кубических корней станет таким же лёгким, как назвать значение числа π . Например, в данном случае:

Какой кубический корень 314 432?

Выглядит как довльно тяжелый пример для старта, но не паникуйте, он на самом деле довольно простой. Как обычно, будем двигаться постепенно:

* Посмотрите на величину тысяч (the numbers to the left of the comma), 314 в данном примере
* Так как 314 лежит между $6^3 = 216$ и $7^3 = 343$, кубический корень находится в районе 60> (так как $60^3 = 216\ 000$ и $70^3 = 343\ 000$). Следовательно, первая цифра кубического корня будет 6
* Для определения последней цифры кубического корня, заметьте, что только число 8 обладает кубом, оканчивающимся на 2 ($8^3 = 512$), так что последняя цифра оканчивается на 8.

Поэтому кубический корень 314 432 будет 68. Три простых шага и вы на месте. Обратите внимание, что какждая цифра от 0 до 9 появляется по одному разу в виде последней цифры куба. (В действительности, последняя цифра кубического корня равна последней цифре куба последней цифры куба. Попробуй разберись!)

А теперь попробуйте для практики:

Какой кубический корень 19 683?

- 19 находится между 8 и 27 (2^3 и 3^3)
- Следовательно, кубический корень где-то в районе 20>
- Последняя цифра в задаче 3, что соответствует $343 = 7^3$, значит 7 - это последняя цифра

Ответ 27.

Обратите внимание, что наши выводы по поводу последней цифры работают, только если исходное число - кубический корень для целого числа. Например, кубический корень 19 684 бует 27,0004572 . . . Определённо не 24. Вот почему включили это в раздел математической магии, а не в более ранние главы. (Кроме того, расчёты такие быстрые, что кажется, будто без магии не обошлось!)

Упрощенные квадратные корни

Квадратные корни также могут быть легко посчитаны, если вам задали полный квадрат. Например, если кто-то сказал вам, что квадрат двузначного числа будет 7569, то вы в состоянии мгновенно ответить, что исходное число (квадратный корень) это 87. Вот как:

- Посмотрите на величину сотен (цифры, предшествующие последним двум), 75 в данном примере
- Так как 75 находится между 8^2 ($8 \times 8 = 64$) и 9^2 ($9 \times 9 = 81$), то нам известно, что квадратный корень будет где-то в районе 80>. Следовательно, первая цифра квадратного корня будет 8. Существует два числа, чьи квадраты заканчиваются на 9: $3^2 = 9$, $7^2 = 49$. Так что последня цифра должна быть 3 или 7. Таким образом, квадратный корень либо 83, либо 87. Какой из них?
- Сравните исходное число с квадратом 85 (который мы можем легко посчитать как 80 x 90 + 25 = 7225). Так как 7569 больше, чем 7225, квадратный корень будет большим числом, 87.

Давайте решим ещё один пример.

Какой квадратный корень 4761?

Так как 47 лежит между $6^2 = 36$ и $7^2 = 49$, ответ должен быть в районе 60>. Раз уж последняя цифра квадрата есть 1, то последняя цифра квадратного корня должна быть 1 или 9. Так как 4761 больше, чем $65^2 = 4225$, то квадратный корень должен быть 69. Как и с предыдущим трюком для кубического корня, этот метод может быть использован, только когда исходное число даёт полный квадрат.

Удивительная сумма

Следующий трикс впервые был показан мне Джеймсом «Удивительным» Рэнди, который его эффективно использовал в своей магии. Здесь волшебник может предсказать сумму четырёх случайно выбранных трёхзначных чисел.

Дабы подготовить данный фокус, вам понадобятся три комплекта колод из девяти карт каждая и кусок бумаги с записанным числом 2247 на нём, который вы запечатаете в конверт. Далее, над каждым комплектом карт произведите следующие действия:

★ На колоде А запишите следующие цифры (одно на каждую карту):

4286 5771 9083 6518 2396 6860 2909 5546 8174

★ На колоде В запишите следующие числа:

5792 6881 7547 3299 7187 6557 7097 5288 6548

★ На колоде С запишите следующие числа:

2708 5435 6812 7343 1286 5237 6470 8234 5129

Выбирете трёх человек из аудитории и дайте каждому колоду карт. Пусть каждый из ваших добровольцев наугад выберет одну из девяти карт, которые они держат в руках. Допустим, они выбрали числа 4286, 5792 и 5435. Теперь, соблюдая последовательность, пусть каждый громко назовёт одну из цифр четырёхзначного числа: сначала человек А, потом человек В и, наконец, человек С. Скажем, они назвали цифры 8, 9 и 5. Запишите цифры 8, 9 и 5 (895) и скажите: «Вы должны признать, что данное число было выбрано полностью наугад и не могло быть возможности заранее предсказать его».

Далее, пусть три человека выкрикнут другие цифры со своих карт. Скажем, были названы 4, 5 и 3. Запишите 453 ниже числа 895. Затем повторите данную процедуру ещё два раза для двух оставшихся чисел, получив в итоге четыре трёхзначных числа, что-то вроде:

	A	B	C
	8	9	5
	4	5	3
	2	2	4
	6	7	5
2	2	4	7

После пусть кто-нибудь сложит эти четыре числа и озвучит сумму. А дальше пусть кто-нибудь откроет конверт, дабы показать ваше предсказание. Наслаждайтесь аплодисментами!

Почему это работает

Взгляните на числа на картах каждой из колод и посмотрите, сможете ли вы найти каку-либо последовательность. Каждый набор чисел в сумме даёт одинаковую величину. Набор чисел А при сложении даёт 20. Набор В - 23. Набор С - 17. С цифрами из колоды «С», которые в правом столбике дают в сумме 17, вы всегда будете записывать 7 и переносить 1. С числами из колоды «В», которые в сумме дают 23 (плюс 1), вы всегда будете записывать 4 и переносить 2. Наконец, с числами из колоды «А», которые в сумме дают 20, после прибавления 2 вы получите общий итог 2247!

День для любой даты

Мы завершим нашу книгу одним из проверенных временем подвигов ментальных калькуляций: как узнать на какой день недели приходится чей-либо день рождения. Это действительно очень практичный навык. Не каждый денькто-то будет просить вас возвести в квадрат трёхзначное число, но едва ли один день проходит без того, что кто-то упоминает дату из прошлого или будущего. Всего лишь немного практики, и вы сможете быстро и легко определять день недели практически любой исторической даты. Сначала мы присвоим кодовый номер каждому дню недели. Их легко запомнить:

ПОНЕДЕЛЬНИК	ВТОРНИК	СРЕДА	ЧЕТВЕРГ	ПЯТНИЦА	СУББОТА	ВОСКРЕСЕНИЕ
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7 или 0*

Далее нам понадобится код для каждого месяца. Коды будут использоваться для каждого года за двумя исключениями. Во время високосного года (например, 2000-2004-2008 и так далее) код месяца для Января будет 5, а для Февраля 1.

Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь	Июль	Август	Сентябрь	Октябрь	Ноябрь	Декабрь
6 (5)	*2 (1)*	*2*	*5*	*0*	*3*	*5*	*1*	*4*	*6*	*2*	*4*

Теперь давайте вычислим день недели для любой даты в 2006 году. После этого, мы опишем 2007, затем 2008, и так далее, до конца вашей жизни. Когда все даты из будущего будут разобраны, мы сможем заглянуть назад в прошлое и определить дни недели для любой даты из 1900-ых или любого другого века.

Каждому году присвоен кодовый номер, и в случае 2006 года таковым будет 0 (см. страницу).

Теперь, чтобы вычислить день недели, вы просто складываете код месяца плюс код даты плюс код года. Таким образом, для 3 Декабря 2006 года, мы рассчитываем

Код месяца + Дата + Код года = 4 + 3 + 0 = 7

Следовательно, эта дата приходится на День 7, что есть Воскресенье.

Как на счёт 18 Ноября 2006? Так как Ноябрь имеет код месяца 2, мы имеем

Код месяца + Дата + Код года = 2 + 18 + 0 = 20

Теперь, раз уж неделя повторяется каждые семь дней, мы можем отнять любое кратное 7 от нашего ответа (7, 14, 21, 28, 35, . . .) и это никак не повлияет на день недели. Итак, наше заключительное действие представляет собой вычитание наибольшего кратного 7, чтобы получить 20 - 14 = 6. Следовательно, 18 Ноября 2006 года выпадает на Субботу.

Как на счёт 2007? Ну, что происходит с днём вашего рождения, когда вы переходите от одного года к следующему? Большинство из них состоит из 365 дней, и, так как 364 кратно 7 (7 x 52 = 364), то день недели вашего рождения передвинется вперёд на один (в случаях, когда 1 год = 365 дней). Если между вашими днями рождения 366 дней, тогда день недели вашего рождения передвинется на два вперёд. Следовательно, для 2007 года мы вычислили день недели как и раньше, но сейчас мы использовали код года 1. Далее, 2008 - високосный год. (Високосный год приходится на каждый четыре года, так что 2000, 2004, 2008, 2012, . . . , 2096 - високосные года двадцать первого века) Отсюда, для 2008, код года увеличивается на два, так что он теперь будет 3. Следующий год, 2009, не является високосным, так что код увеличивается на 1 (и будет 4).

Таким образом, 2 Мая 2007 года, например, будет

Код месяца + Дата + Код года = 0 + 2 + 1 = 3

так что эта дата приходится на Среду.

Для 9 Сентября 2008 года мы имеем

Код месяца + Дата + Код года = 4 + 9 + 3 = 16

Отнимая наибольшее кратное 7, мы получаем 16 - 14 = 2, так что дата приходится на Вторник.

С другой стороны, 16 Января 2008 года - високосный период, так что код месяца будет 5, вместо 6. Мы имеем

Код месяца + Дата + Код года = 5 + 16 + 3 = 24

и вследствие этого приходится на день 24 - 21 = 3, который является Средой. Для справки, мы перечислили все коды для каждого года двадцать первого века на рисунке на следующей странице. Хорошая новость заключается в том, что вам не нужно запоминать данную таблицу. Мы может устно посчитать код года для любой даты в промежутке от 2000 до 2099. Для определения кода 2000 + x, мы просто берём число x/4 (игнорируя остаток) и прибавляем частное к x. Код года может быть сокращён путём вычитания из него кратного 7. Например, в случае с 2061, мы видим, что 61/4 = 15 (с остатком 1, который мы не учитываем). Таким образом, 2061 имеет код года в размере 61 + 15 = 76. И раз уж мы можем отнять любое кратное 7, то давайте используем упрощённый код года в виде 76 - 70 = 6.

Год	Код	Год	Код	Год	Код	Год	Код
2000	0	2025	3	2050	6	2075	2
2001	1	2026	4	2051	0	2076	4
2002	2	2027	5	2052	2	2077	5
2003	3	2028	0	2053	3	2078	6
2004	5	2029	1	2054	4	2079	0
2005	6	2030	2	2055	5	2080	2
2006	0	2031	3	2056	0	2081	3
2007	1	2032	5	2057	1	2082	4
2008	3	2033	6	2058	2	2083	5
2009	4	2034	0	2059	3	2084	0
2010	5	2035	1	2060	5	2085	1
2011	6	2036	3	2061	6	2086	2
2012	1	2037	4	2062	0	2087	3
2013	2	2038	5	2063	1	2088	5
2014	3	2039	6	2064	3	2089	6
2015	4	2040	1	2065	4	2090	0
2016	6	2041	2	2066	5	2091	1
2017	0	2042	3	2067	6	2092	3
2018	1	2043	4	2068	1	2093	4
2019	2	2044	6	2069	2	2094	5
2020	4	2045	0	2070	3	2095	6
2021	5	2046	1	2071	4	2096	1
2022	6	2047	2	2072	6	2097	2
2023	0	2048	4	2073	0	2098	3
2024	2	2049	5	2074	1	2099	4

Следовательно, 19 Марта 2061 будет

Код месяца + Дата + Код года = 2 + 19 + 6 = 27

Вычитание 27 - 21 = 6 говорит нам, что эта дата будет иметь место быть в Субботу.

Что на счёт дней рождений между 1900 и 1999? Решайте задачу точно также, как и в предыдущих вычислениях, но передвиньте итоговый ответ на один день вперёд (или просто прибавьте 1 к коду года). Таким образом, 19 Марта 1961 года выпало на Воскресенье.

Для даты 3 Декабря 1998 мы имеем 98/4 = 24 (с остатком 2, который мы не берм в расчёт). Отсюда, 1998 год имеет код 98 + 24 + 1 = 123, где «плюс один» прибавляется для чисел в районе 1900>. Далее вычитаем наибольшее кратное 7. Для удобства использования, вот все числа, кратные 7, которые вам могут понадобиться:

7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98, 105, 112, 119, 126, . . .

Так как 123 - 119 = 4, 1998 год будет иметь код 4. Отсюда, 3 Декабря 1998 будет

Код месяца + Дата + Код года = 5 + 16 + 3 = 24

и 11 - 7 = 4, так что эта дата приходится на Четверг.

Для чисел в районе 1800> мы прибавляет 3 к коду года. Например, Чарльз Дарвин и Авраам Линкольн оба родились 12 Февраля 1809 года. Так как 2009 год имеет код 4, тогда 1809 будет иметь код 4 + 3 = 7, который мы можем сократить до нуля. Таким образом, 12 Февраля 1809 будет

Код месяца + Дата + Код года = 2 + 12 + 0 = 14

и 14 - 14 = 0, так что они оба были рождены в Воскресенье.

Для чисел в районе 2100> мы прибавляем 5 к коду года (или вычитаем из него 2, что эквивалентно). Например, так как 2009 имеет код года 4, тогда 2109 имеет код 4 + 5 = 9, который, после вычитания 7, идентичен коду года 2. Даты в районе 1700> обрабатываются прямо как даты 2100> (путём прибавления 5 или вычитания 2), но нам нужно быть внимательными. Числа, которые мы рассчитываем, берут за основу Грегорианский календарь, созданный в 1582. Но этот календарь не был официально принят англичанами (и американскими колониями) вплоть до 1752, когда в среда, 2 Сентября, не стала на следующий день Четвергом, 14 Сентября. Давайте удостоверимся, что 14 Сентября 1752 года в самом деле было Четвергом. Так как код 2052 года равен 2 (посмотрите на странице, или посчитайте 52 + 13 - 63 = 2), тогда 1752 год будет иметь код 0. Отсюда, 14 Сентября 1752

Код месяца + Дата + Код года = 4 + 14 + 0 = 18

и 18 - 14 = 4, значит это действительно был Четверг. Однако, наша формула не сработает для более ранних чисел (которые регулировались Юлианским календарём).

Наконец, отметим, что в соответствии с Григорианским календарем, високосный год наступает раз в четыре года, за исключением тех годов, которые делятся на 100, хотя есть и исключение из исключения: года, делимые на 400, также являются високосными. Так, 1600, 2000, 2400 и 2800 будут високосными; но 1700, 1800, 1900, 2100, 2200, 2300, и 2500 - нет. По сути, Григорианский календарь повторяет себя каждые 400 лет, так что вы можете конвертировать любую дату из будущего в дату около 2000 года. Например, 19 Марта 2361 и 19 Марта 2761 будут приходиться на тот же день недели, что и 19 Марта 1961, которое мы уже ранее определили как Воскресенье.

Упражнение: день для любой даты

Определите день недели для следующих чисел:

- 19 Января 2007
- 14 Февраля 2012
- 20 Июня 1993
- 1 Сентября 1983
- 8 Сентября 1954
- 19 Ноября 1863
- 4 Июля 1776
- 22 Февраля 2222
- 31 Июня 2468
- 1 Января 2358

ГЛАВА ∞

Эпилог: как математика помагает нам задумываться о странных вещах

Майкл Шермер

Как издатель журнала «Скептик» , исполнительный директор Сообщества Скептиков, и редактор «Scientific American», ведущий ежемесячную колонку под названием "Скептик", я получаю тонны почты от людей, которые бросают мне вызов историями о своём необычном опыте (дома с привидениями, призраки, опыт вне тела и околосмертельный опыт, НЛО, похищения инопланетянами, предчувствие смерти во сне, и многое другое).

Самые интересные истории для меня это те, которые повествуют о весьма невероятных событиях. Смысл послания автора: если я не могу предложить удовлетворительного «естественного» объяснения для данного конкретного события, то общий принцип «сверхъестественного» сохраняется. Обычная история, когда человеку приснилась смерть друга или родственника, а на следующий день им по телефону сказали о неожиданной смерте человека из их сна. «Каковы шансы такого совпадения?» - меня спрашивают.

Здесь-то математика и начинает играть роль в нашем мышлении и аргументировании. Я не собираюсь с важным видом говорить о том, как школьный курс математики учит людей мыслить критически, потому что об этом говорит, вероятно, почти каждый учитель математики почти в каждом классе почти каждой школы в Америке (хотя бы раз в год). Я хочу дать вам несколько конкретных примеров того, как я использую очень простую математику, которая помогает мне в процессе работы объяснять, почему такие странные вещи происходят с людьми.

Хотя я не всегда могу истолковать какие-то конкретные случай, вероятностный принцип, называемый «законом больших чисел», показывает, что событие с низкой вероятностью возникновения при небольшом количестве испытаний имеет высокую вероятность появления при большом количестве испытаний. Или, как я люблю говорить, «один шанс на миллион реализуется в Америке 295 раз на дню».

Давайте начнём с предчувствия смерти. Вот небольшие «предварительные» расчёты, которые я произвёл. Психологи говорят нам, что среднестатистический человек видит около пяти снов в день, что равняется 1825 снам в год. Даже если мы будет помнить только один из десяти, то это всё равно будет 182,5 отложенных в памяти сна в год. У нас в стране проживает 295 миллионов человек, это означает, что будет запомнено 53,8 миллиарда снов в течение года. Антропологи и социологи сейчас твердят, что каждый из нас довольно хорошо знает 150 человек (то есть, среднестатистический человек держит в своей адресной книге около 150 имён, о каждом носителе которого может нечто существенное). Это означает, что существует сеть контактов размером с 44,3 миллиарда межличностных отношений среди 295 миллионов американцев. Ежегодный уровень смертности США (любая причина, любой возраст) составляет 0,008 или 2,6 миллиона в год. Это неизбежно, что какой-то из этих 53,8 миллиардов запомнившихся снов придётся на какую-то из этих 2,6 миллионов смертей среди 295 миллионов американцев с их 44,3 миллиардами связей. Это было бы чудом, на самом деле, если бы ни один из этих снов-«предвестников смерти» не претворился в жизнь.

Даже если мои числа ошибочны, даже грубо ошибочны, сама мысль от этого не теряет. Каковы шансы, что предчувствие смерти воплотится в реальности? Очень даже высокие.

Существует дополнительный психологический фактор, называемый «смещение, обусловленное необходимостью аргументации выбранной точки зрения»/«предвзятость подтверждения» (то самое состояние, когда мы замечаем наши попадания и игнорировать промахи при поддержке наших любимых убеждений). Такая предвзятость подтверждения объясняет, как работают теории заговора, например. Люди, которые придерживаются определенной теории заговора (9/11 было организовано администрацией Буша для того, чтобы начать войну на Ближнем Востоке), будут искать и находить маленькие фактоиды[6] тут и там, что, кажется, будет указывать на то, что это может быть правдой (Буш сидел в этом классе и занимался с детьми чтением про коз, как если бы он знал, что он в безопасности), игнорируя при этом огромный объем доказательств, которые указывают на другое, более вероятное объяснение событий (Усама бен Ладен и его банда международных террористов организовали 9/11). Предвзятость подтверждения также помогает объяснить, каким образом астрологи, гадалки и экстрасенсы выглядят настолько успешным в "чтении" людей. Люди, которых «прочли», вероятнее всего запомнят несколько попаданий и забудут бесчисленные промахи. Если реально подсчитать все попадания и промахи — как я однажды сделал для специального выпуска про медиумов на телеканале ABC — то получается, что это не более чем угадывание и случайность в действии.

6

В случае снов-«предвестников смерти», если бы только парочка из этих людей, которым такое снится, поведали свои «чудесные сказки» на общественном форуме (сидя рядом с Опрой!), паранормальность, кажется, оправдалась бы. Но по сути, это не что иное, как ярко выраженные законы вероятности.

Такой математический процесс размышлений о странных вещах привел меня к другим черновым расчётам касательно чудес. Люди обычно пускают в ход термин «чудо» для описания действительно необычные событий; событий, шансы на происхождение которых равны «миллион к одному». Хорошо, давайте возьмём это в качестве «бенчмарка»: чудо - это событие, вероятность наступления которого один на миллион. Сейчас, в течение всего дня мы видим и слышим как что-то происходит примерно раз в секунду. То есть, данные со всего мира и события вокруг нас поступают к нам через органы чувств со скоростью около одного в секунду. Если мы бодрствуем и сохраняем бдительность, находясь в этом «мире», скажем, восемь часов в день, это означает, что существует тридцать тысяч бит данных в день или один миллион событий в месяц, которые мы пропускаем через себя. Конечно, подавляющее большинство этих данных и событий не несут никакого смысла, и наш мозг устроен так, чтобы отфильтровывать и забывать большинство из них, иначе, мы были бы перегружены. Но, рамках одного месяца, мы можем ожидать, что событие «один на миллион» наступит хотя бы раз. Прибавьте к этому предвзятость подтверждения, когда мы будем помнить самые необычные события и забудем про всё остальное, и это станет неизбежным: кто-то где-то будет сообщать о «чуде» каждый месяц. И таблоиды будут тут как тут, дабы зафиксировать это!

Это короткий учебник на тему «Как работает наука». В нашем стремлении понять, как устроен мир, мы должны определить, что реально, а что нет; что происходит случайно, а что по конкретной предсказуемой причине. Проблема, с котороый мы сталкиваемся, состоит в том, что человеческий мозг в процессе эволюции приспособился обращать внимание на действительно необычных события и игнорировать огромный объем данных, проистекающих параллельно; само по себе, мышление в статистических и вероятностных категориях не дано природой. Наука не дана природой. Всё это подразумевает некую подготовку и практику.

Вдобавок ко всему, существуют эти досадные когнитивные искажения, которые я упомянул (например, предвзятость подтверждения). Есть и другие. Данные не просто говорят сами за себя. Они фильтруются через очень субъективные и предвзятые мозги. Такое корыстное смещение, например, навязывает нам склонность видеть себя в более позитивном свете, нежели нас видят другие: национальные опросы показывают, что большинство деловых людей считают, что они более нравственные, чем другие представители бизнес среды, в то время как психологи, изучающие моральную интуицию, думают будто они более порядочные, чем их коллеги. В одном из исследований «College Entrance Examination Board» из выборки 829 000 абитуриентов, 0 процентов оценили себя ниже среднего в «умение ладить с другими», в то время как 60 процентов поставили себя в топ-10 процентов (по-видимому, не все из них были из района «Мрачного озера») . И согласно исследованию U.S. News & World Report[7] (1997) касательно веры американцев в то, кто, скорее всего, попадёт в Рай, 52 процентов назвали Билла Клинтона; 60

[7] Американский новостной журнал, издаваемый в Вашингтоне

процентов полагают, что принцесса Диана; 65 процентов выбрали Майкла Джордана; 79 процентов выбрали Мать Терезу, и 87 процентов респондентов выбрали в качестве такого человека своего интервьюера!

Профессор психологии из Принстонский университет, Эмили Пронин, и её коллеги провели испытание типа предвзятости под названием «слепое пятно», во время которого объекты исследования признали существование и влияние на других людей восьми различных когнитивных отклонений, но они не смогли разглядеть тех же смещений в себе. В одном из исследований студентов из Стэнфордского университета, их просили сравнить себя со своими сверстниками на предмет таких личных качеств, как дружелюбность и эгоизм. Они, предсказуемо, оценили себя выше. Даже тогда, когда объектов исследования предупредили о типе смещения «лучше среднего» и попросили пересмотреть свои первоначальные оценки, 63 процентов респондентов заявили, что их первоначальные оценки были объективными, а 13 процентов даже утверждали, что они уже изначально были слишком скромны! Во втором исследовании Пронин наугад приписала респондентам высокие или низкие оценки по результатам теста «Социальный интеллект». Неудивительно, что те, кто получил высокие оценки, назвали тест более справедливым и полезным, чем те, кто получил низкие оценки. Когда их спросили, есть ли вероятность, что их мнение было продиктовано результатами теста, студенты ответили, что другие участники были гораздо более предвзяты, чем они. По результатам третьего исследования, в ходе которого Пронин расспрашивала студентов про методы, которые они используют для оценки своих и чужих предубеждений, она обнаружила: люди склонны использовать общие поведенческие теории при оценке других, но применять методы самоанализа (рефлексии) при оценке себя. Однако, они не верят в так называемую «иллюзию самообмана», при этом считая, что другие не могут похвастаться её отсутствием. Что действует для меня, не имеет никакого отношения к тебе.

Психолог Фрэнк Дж. Саллоуэй из Калифорнийского университет в Беркли и я сделали схожее открытие в сфере «предвзятости приписывания[8]» по ходу исследования на тему «Почему люди говорят, что верят в Бога и почему, на их взгляд, в него верят другие», которое мы провели. В общем случае, большинство людей связывают свою собственную веру в Бога с такими интеллектуальными причинам, как устройство и сложности мира. В то же самое время они приписывают чужую веру в Бога эмоциональным причинам (так комфортнее, это придает смысл, их так воспитали).

Политологи сделал аналогичное открытие по поводу политических отношений, где республиканцы оправдывают свои консервативные взгляды рациональными аргументами, но утверждают, что демократы есть "мягкотелые либералы", в то время как демократы утверждают, что их либеральные настроения наиболее рациональны, но обвиняют республиканцев в «бессердечности».

Как наука справляется с такими субъективными предубеждениями? Откуда мы знаем, является ли утверждение ложным или реальным? Мы хотим быть достаточно открытыми для новых идей, чтобы быть в состоянии принять радикальные точки зрения, когда время от времени на них натыкаемся. Но мы не хотим быть настолько восприимчивыми, чтобы наш мозг вышел из строя. Эта проблема привела нас в «Сообщество скептиков», дабы создать

---

[8] Приписывание (атрибуция) - механизм объяснения причин поведения другого человека.

образовательный инструмент под названием «Чепуха Детектед». Нас вдохновили рассуждения Карла Сагана из его чудной книги, «Заполонённый демонами мир», о том, как обнаружить «чушь». В комплекте с набором «Чепуха детектед» мы предлагаем десять вопросов, которые следует задать себе при столкновении с каким-либо утверждением. Они могут помочь нам решить, ведём ли мы себя слишком открыто, принимая всё на веру, или слишком закрыто, отвергая что-либо.

Насколько надежным является источник утверждения?

Как эффективно продемонстрировал Даниэль Кивлес в своей книге «The Baltimore Case» (2000), при расследовании возможного научного мошенничества краевая задача состоит в обнаружении обманного сигнала в рамках фонового шума ошибок и разгильдяйства, которые являются нормальной частью научного процесса. Исследование научных заметок (проведено независимым комитетом, утверждённым Конгрессом для расследований возможных случаев научного мошенничества) в лабаратории, связанной с лауреатом Нобелевской премии Дэвидом Балтимором, выявило удивительное количество ошибок. Но наука в куда большем беспорядке, чем большинство людей себе это представляют. Балтимор был оправдан, когда стало ясно, что не было никакой целенаправленной обработки данных.

Часто ли данный источник делает такие утверждения?

Лжеученые имеют привычку выходить далеко за границы фактов. Поэтому, когда люди делают многочисленные экстраординарные заявления, они могут стать нечто большим, нежели просто возмутителями спокойствия. Это вопрос количественного масштабирования, так как некоторые великие мыслители часто выходят за рамки данных в своих творческих умозрениях. Томас Годл из Корнелльского университета известен за свои радикальные идеи, но он был прав достаточно часто, так что другие ученые прислушиваются к тому, что ему есть сказать. Голд предполагает, например, что нефть совсем не является ископаемым топливом, но есть побочный продукт глубокой горячей биосферы. Едва-ли любой ученый на Земле, с которым я разговаривал, воспринимает этот тезис серьезно, однако, они не считают Голда чудаком. Что мы ищем здесь, так это примеры переферийного (выходящего за рамки) мышления, которое последовательно игнорирует или искажает данные.

○ Были ли эти утверждения подтверждены каким-либо другим источником?

Обычно лжеученые будут делать заявления, которые не проверены, или проверены источником, который находится внутри группы людей с такими же убеждениями. Мы должны спросить о том, кто проверяет утверждения, и даже о том, кто проверяет тех, кто проверяет. Самая большая проблема с неудачей холодного ядерного синтеза, например, не в том, что ученые Стэнли Понс и Мартин Флейшман ошиблись; проблема в том, что они объявили о своём захватывающем открытии прежде, чем оно было проверено другими лабораториями (на пресс-конференции, что удивительно). И что ещё хуже, когда холодный ядерный синтез не был воспроизведён, они продолжали цепляться за своё утверждение.

○ Как это утверждение соотносится с тем, что мы уже знаем о нашем мире?

Необычные утверждения должны быть помещены в более широкий контекст, чтобы увидеть, вписываются ли они. Когда люди утверждают, что пирамиды и Сфинкс были построены более десяти тысяч лет назад передовой расой людей, они не предоставляют сопутствующего контекста существования этой более ранней цивилизации. Где остальные артефакты тех людей? Где их произведения искусства, их оружие, их одежда, их инструменты, их мусор? Археология работает определённо не так.

○ Кто-нибудь побеспокоился об опровержении данного утверждения или были найдены только подтверждающие доказательства?

Это предвзятость подтверждения, или склонность искать подтверждающие доказательства и отрицать (или проигнорировать) неподтверждающие доказательства. Предвзятость подтверждения - мощная и широко распространенная проблема, и её практически никому из нас невозможно избежать. Именно поэтому научные методы, которые придают особое значение проверкам и перепроверкам, верификации и репликации, и, в особенности, попыткам доказать ложность утверждения, настолько важны.

○ Более веские доказательства приводят к такому же заключению, как и у автора утверждения, или к другому?

Теория эволюции, например, была подтверждена благодаря совпадению доказательств из ряда независимых исследований. Нет ни одного ископаемого, нет ни единого экземпляра биологического или палеонтологических доказательства с надписью «эволюция" на нём.

Вместо этого есть совпадение десятков тысяч битов доказательной информации, которые в сумме дают истории эволюции жизни. Креационисты просто-напросто игнорируют такую конвергенцию, сосредотачиваясь вместо этого на тривиальных аномалиях или, в настоящее время, необъяснимых явлений из истории жизни.

- **Держит ли автор утверждения у себя на службе общепринятые правила аргументации и инструменты исследования, или же от всего этого пришлось отказаться ради других методов, которые способны привести к желанному выводу?**

Уфологи страдают от этого заблуждения в своей постоянной направленности усилий на небольшое количество необъяснимых атмосферных аномалий и ошибочных зрительных свидетельствах очевидцев, в то время как преспокойненько игнорируют тот факт, что подавляющее большинство зрительных контактов (от 90 до 95 процентов) с НЛО можно полностью объяснить, используя прозаические ответы.

- **Предоставил ли автор утверждения другое объяснение наблюдаемых феноменов или это процесс беспощадного отрицания существующей теории?**

Это классическая стратегия спорщика: критиковать своего оппонента и никогда не подтверждать информацию о своих убеждениях, дабы избежать критики. Но такая уловка неприемлема в науке. Скептики Большого Взрыва, например, игнорируют конвергенцию доказательств этой космологической модели, и сосредоточиваются на нескольких её недостатках, и до сих пор предлагают жизнеспособную ей альтернативу (которая является поставщиком перевешивающих доказательств в пользу существующей модели)

○ В случае, если автор утверждения предложил новое объяснение, удовлетворяет ли оно такому же количеству феноменов, как и старое?

Скептики ВИЧ-СПИДа утверждают, что образ жизни, а не ВИЧ, вызывает СПИД. Тем не менее, чтобы сделать такое утверждение, они должны проигнорировать конвергенцию доказательств в поддержку ВИЧ как причину переноса инфекции СПИД, и одновременно проигнорировать такое очевидное свидетельство как серьёзная зависимость между ростом распространения СПИДа среди больных гемофилией, вскоре после того, как ВИЧ по невнимательности был внесён в систему кровоснабжения. Вдобавок к этому, их альтернативная теория и близко не объясняет такое количество фактов, как теория ВИЧ.

○ Это личные убеждения и предвзятости движут автором утверждения, или наоборот?

Все ученые придерживаются социальных, политических и идеологических убеждений, которые потенциально могут послужить перекосом в процессе интерпретации данных, но как эти предрассудки и убеждения влияют на само исследование? В какой-то момент, как правило, в период рецензирования научной статьи, такие предубеждения и верования «удаляют с корнем» либо статья или книга будут забракованы для публикации. Вот почему не следует работать в интеллектуальном вакууме. Если вы не увидите предубеждения в вашем исследовании, кто-нибудь другой увидит.

Не существует строго определённого набора критериев, которые мы можем применить для определения степени открытости, которой нам следует придерживаться во время первого знакомства с новыми утверждениями и идеями. Но благодаря математическим расчётам вероятности наступления странных событий и с помощью анализа вопросов, которые мы должны задать себе при такой встрече, мы сделаем первый шаг навстречу к схватке с вашим странным и чудным миром.